SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA BRĂILA

REVISTA DE MATEMATICĂ DIN BRĂILA

Revistă fondată în 2017, editura Şcoala Brăileană
Nr. 1 / 2017

ISSN 2559-401X
ISSN-L 2559-401X

Revista de matematică din Brăila este publicație editată de Societatea de Ştiințe Matematice din Romania, filiala Brăila şi se adresează tuturor celor interesați şi de … MATEMATICĂ.

Copertă realizată de Cristian Dinu

Redacția
Str. Şcolilor, nr. 81, bl. PP, sc. 4, ap. 6, Brăila, telefon 0744638323
Transmiterea materialelor se poate face la adresa
rmatebr@gmail.com

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

Metoda comparației – element de noutate în programa şcolară pentru disciplina matematică, clasa a IV-a, aprobată prin ordinul ministrului educaţiei naţionale nr. 5003/02.12.2014

Prof. Ecaterina Carmen Bonciu

Școala Gimnazială „Ion Creangă” Brăila

Programa de matematică pentru clasa a IV-a, aprobată prin ordinul ministrului educaţiei naţionale nr. 5003/02.12.2014 și aplicabilă din acest an școlar la clasă, are elemente de noutate, atât în ceea ce privește conținutul, cât și prin recomandările metodice stipulate, prin modalitățile de aplicare. Conţinuturile învăţării sunt grupate pe următoarele domenii: numere şi operaţii cu numere, elemente intuitive de geometrie, unități și instrumente de măsură, organizarea şi reprezentarea datelor.

Dintre conținuturile noi, exemplificăm o posibilă abordare metodică a temei „metoda comparației” sau „metoda aducerii la același termen de comparație”.

O problemă din această categorie cuprinde referiri la două situații distincte, în care apar aceleași mărimi, aducerea la același termen de comparație făcându-se prin scădere, sau dintr-o singură situație, completată cu o relație între cele două mărimi, când reducerea la unitate se face prin înlocuire.

Elevii vor fi deprinși să recunoască cele două tipuri ale metodei, să redacteze datele problemei, folosind schema corespunzătoare. În cazul în care valorile aceleiași mărimi sunt egale, reducerea este imediată prin scăderea relațiilor respective. Dacă din enunțul problemei nu rezultă valori egale, atunci apare necesitatea aducerii la același termen de comparație. Aceasta se face prin multiplicarea datelor, convenabil pentru a se face eliminarea prin scădere, sau înlocuirea unei mărimi.

Metoda comparației – varianta de rezolvare „Eliminarea unei necunoscute prin scădere”

Situația de învățare propusă: Doi copii, un băiat și o fată, au fost la cumpărături. Băiatul a cumpărat 3 ciocolate și 5 napolitane și a plătit 19 lei. Fata a cumpărat 3 ciocolate și 2 napolitane și a plătit 13 lei. Solicităm elevilor să calculeze cât costă o ciocolată și cât costă o napolitană, știind că cei doi copii au cumpărat din același magazin și la aceleași prețuri.

Cum rezolvăm? Scriem datele problemei.

3 ciocolate … 5 napolitane ……19 lei 3 ciocolate … 2 napolitane ……13 lei 1 ciocolată=? lei; 1 napolitană= ? lei Comparând mărimile scrise, observăm că în prima relație sunt cu 3 napolitane mai mult, dar și suma plătită este mai mare; înseamnă că valoarea a 3 napolitane se află în această diferență.	Rezolvare: 5 – 3 = 3 (mai multe napolitane cumpărate de băiat) 19 – 13 = 6 lei (costul a 3 napolitane) 6 lei : 3 = 2 lei (prețul unei napolitane) Înlocuim valoarea aflată în una din cele două relații și obținem prețul unei ciocolate. 3 ciocolate …. 5 × 2 lei.…19 lei 19 – 5 × 2 = 9 lei (3 ciocolate) 9 lei : 3 = 3 lei (o ciocolată).

Stabilim, împreună cu elevii, pașii de rezolvare.

Pentru a rezolva acest tip de probleme, trebuie să parcurgi următorii pași:

-scrii datele pe două rânduri;

-compari mărimile și găsești o modalitate de eliminare a unei necunoscute;

-afli necunoscuta rămasă;

-afli cealaltă necunoscută prin introducerea valorii aflate în una din cele două relații.

Propunem, pentru formarea algoritmului de lucru, probleme asemănătoare.

Metoda comparației – varianta de rezolvare „Eliminarea unei necunoscute prin înlocuirea ei”

Situația de învățare propusă: Pentru 2 penare și 5 stilouri, mama a plătit 88 lei. Cât costă un penar și cât costă un stilou, dacă din banii dați pe un penar se pot cumpăra 3 stilouri?

Cum rezolvăm? Scriem datele problemei.

2 penare și 5 stilouri … 88 lei 1 penar $\longrightarrow$ 3 stilouri 1 penar = ? lei; 1 stilou = ? lei	Pentru a avea o singură necunoscută, înlocuim în relație penarele cu stilouri. Vom avea acum: 2 × 3 + 5 = 11 (stilouri, care costă 88 lei). 88 : 11 = 8 lei (prețul unui stilou) 8 lei × 3 = 24 lei (prețul unui penar)

Pentru consolidarea cunoștințelor propunem probleme cu grade de dificultate diferite, încadrabile în această metodă-tip de rezolvare, cum ar fi:

- Patru roboței costă cât 6 mingi. Cât costă fiecare, dacă un roboțel este mai scump decât o minge cu 4 lei?
- Pentru 5 jocuri Puzzle s-a plătit cu 2 lei mai mult decât pentru 3 cuburi Rubik. Află cât costă un cub și cât costă un joc, dacă cubul este mai scump decât jocul cu 4 lei.

- Cu banii pe care îi are, Mihaela poate cumpăra 3 buchete de trandafiri sau 5 buchete de crizanteme. Dacă buchetul de trandafiri este mai scump decât buchetul de crizanteme cu 2 lei, află cât costă fiecare buchet și câți lei are Mihaela.

Dintre problemele cu grad mai mare de dificultate, care „au dat bătăi de cap” elevilor, exemplificăm:

Problemă: Un ogar urmărește o vulpe care are 12 sărituri înaintea lui. Câte sărituri va face ogarul până să o ajungă pe vulpe, știind că el face 7 sărituri, în timp ce vulpea face 8 sărituri, și că în 5 sărituri ogarul parcurge aceeași distanță pe care o parcurge vulpea în 6 sărituri.

<table>
<tr><td></td><td>Ogarul</td><td>vulpea</td></tr>
<tr><td>Timp
Distanță</td><td>7 sărituri în timpul a……
5 sărituri fac cât …</td><td>8 sărituri
6 sărituri</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Aducem la același termen de comparație:</td></tr>
<tr><td>Timp
Distanță</td><td>35 de sărituri în timpul a……
35 de sărituri fac cât…</td><td>40 de sărituri
42 de sărituri</td></tr>
<tr><td colspan="3">La fiecare 35 de sărituri ale ogarului, el face în plus o distanță egală cu distanța parcursă de vulpe în două sărituri. Cum vulpea făcuse înaintea ogarului 12 sărituri, acesta va trebui să recupereze această distanță făcând de 6 ori (12 : 2 = 6) câte 35 de sărituri, adică 35 × 6 = 210 sărituri.
R: ogarul o ajunge pe vulpe după 210 sărituri</td></tr>
</table>

Activităţile de învățare pot fi organizate individual, frontal sau în echipe, cultivând astfel spiritul de echipă, încrederea în sine şi respectul pentru ceilalţi, toleranţa, curajul de a prezenta o opinie personală şi spiritul de iniţiativă al elevilor. Încrederea în sine şi autonomia personală sunt susţinute la nivel metodologic prin utilizarea erorii ca sursă de învăţare, prin încurajarea obţinerii de soluţii multiple şi prin aplicarea matematicii în viaţa familială şi în evenimentele trăite în clasă sau în şcoală. Astfel se formează interesul elevilor pentru a reuşi în învăţare şi pentru continuarea studiului disciplinei.

Bibliografie:

MEN, Programa şcolară pentru disciplina matematică clasele a III-a – a IV-a, aprobată prin ordinul ministrului educaţiei naţionale nr. 5003 /02.12.2014

Bonciu, E., Gherman, A., Stănculescu, N., 1200 de exerciţii şi probleme. Matematică. Clasa a IV-a, Editura Litera, București, 2016.

Domnițeanu, P., Bonciu, E., Didactica matematicii în învățământul primar, Editura Sinteze, Galați, 2003.

Neacșu, I., Gălățeanu, M., Predoi, P., Didactica matematicii în învățământul primar, Editura Aius, Craiova, 2001.

Strategii de rezolvare a unor ecuaţii

Prof. Daniela Narcisa Stănică
Liceul Pedagogic "D. P. Perpessicius" Brăila

În zona problemelor pregătitoare pentru olimpiade şi concursuri, un capitol important este cel dedicat ecuaţiilor algebrice în $\mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z}\mathrm{X}\mathbb{Z}$. Prezentăm 4 variante de lucru accesibile în gimnaziu pentru următoarea problemă:

Rezolvaţi în $\mathbb{Z}\mathrm{X}\mathbb{Z}$ ecuaţia $xy - 2x - 3y = 5$.

Soluţia 1. Prima metodă de rezolvare a acestei ecuaţii se bazează pe transformarea expresiei din membrul stâng în produs, folosind factorul comun. Observăm că între primii doi termeni putem da factor comun x şi obţinem $x(y-2)$. Dar $-3y = -3y + 6 - 6 = -3(y-2) - 6$.

Obţinem $x(y-2) - 3(y-2) - 6 = 5$ sau dând factor comun pe $y-2$, $(y-2)(x-3) = 11$. Rămâne să ne gândim care sunt perechile de numere întregi al căror produs este 11 şi avem cazurile:

$y-2=1$ şi $x-3=11$, adică $x=14$ şi $y=3$ sau $y-2=11$ şi $x-3=1$, adică x = 4 şi y =13.

$y-2=-1$ şi $x-3=-11$, adică $x=-8$ şi y = 1 sau $y-2=-11$ şi $x-3=-1$, adică x = 2 şi $y=-9$.

În final S= {(14;3) ; (4;13) ; (-8;1) ; (2; -9)}.($S \subset \mathbb{Z}\mathrm{X}\mathbb{Z}$)

Soluţia 2. Pentru început să "scoatem" pe x în funcţie de y.

Obţinem $x=\dfrac{3y+5}{y-2}$ (dacă y = 2 obţinem –6 = 5 (F) deci y nu poate fi 2) şi punem condiţia $\dfrac{3y+5}{y-2}\in\mathbb{Z}$. Obţinem:

$\dfrac{3y-6+11}{y-2}=\dfrac{3(y-2)+11}{y-2}=\dfrac{3(y-2)}{y-2}+\dfrac{11}{y-2}=3+\dfrac{11}{y-2}\in\mathbb{Z}$ şi cum 3 este număr întreg $\Rightarrow$ $y-2\in D_{11}$ şi obţinem exact S de mai sus.

Observaţie. Dacă avem $4xy + 3y - 5y = 3$ (*) obţinem $y=\dfrac{5x+3}{4x+3}\in\mathbb{Z}$ şi se impune înmulţirea fracţiei cu 4 şi repetarea procedeului prezentat în ***soluţia 2***. Toate perechile trebuie verificate în (*). (dacă $4\cdot x\in\mathbb{Z}$ nu rezultă obligatoriu că $x\in\mathbb{Z}$: $4\cdot\dfrac{5}{4}\in\mathbb{Z}$ şi totuşi $\dfrac{5}{4}\notin\mathbb{Z}$)

<u>Soluţia 3.</u> Facem notaţia $x = y + k$, unde k este un număr întreg şi ecuaţia iniţială devine: $k=\dfrac{-y^2+5y+5}{y-2}\in\mathbb{Z}$ sau $k=-y+3+\dfrac{11}{y-2}\in\mathbb{Z}$ sau $y-2\in D_{11}$ şi de aici rezolvarea este similară ***soluţiei 1.***

<u>Soluţia 4.</u> Înmulţim ecuaţia cu x şi obţinem $x^2y-2x^2-3xy = 5x$. După utilizarea factorului comun, avem $x^2(y-2)-x(3y+5) = 0$. Să observăm că cele două ecuaţii nu sunt echivalente (a doua ecuaţie are în plus şi pe 0 ca rădăcină). Considerăm ecuaţia obţinută ecuaţie de gradul al II-lea cu necunoscuta x. Avem (conform relaţiilor lui Viete): $x_1 + x_2 = \dfrac{3y+5}{y-2}=\dfrac{3(y-2)+11}{y-2}=3+\dfrac{11}{y-2}\in\mathbb{Z}$.

Deci $y-2\in D_{11}=\{\pm1,\pm11\}$ şi obţinem $(14,3)$, $(-8,1)$, $(4,13)$, $(2,-8)$.

O problemă de olimpiadă, etapa locală, Brăila, 18 martie 2017

Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+e^{x+1}\right)\ln\left(2x+e^{2x+1}\right)...\ln\left(nx+e^{nx+1}\right)-1}{x}$, unde n este număr natural nenul.

Prof. Marius PERIANU

Colegiul Naţional "Ion Minulescu", Slatina, Olt

Soluţie:

Fie $u_n\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(x+e^{x+1}\right)\ln\left(2x+e^{2x+1}\right)...\ln\left(nx+e^{nx+1}\right)-1}{x}, n\geq 1$

$u_1\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+e^{x+1}\right)-1}{x}=1+\dfrac{1}{e}$ şi

$u_n\left(x\right)=\ln\left(nx+e^{nx+1}\right)\cdot u_{n-1}\left(x\right)+\dfrac{\ln\left(nx+e^{nx+1}\right)-1}{x}$,

iar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(nx+e^{nx+1}\right)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(nx+e^{nx+1}\right)-\ln e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{nx}{e}+e^{nx}-1\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{nx}{e}+e^{nx}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{n}{e}+\dfrac{e^{nx}-1}{nx}\cdot n\right)=n\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$,

Prin inducţie matematică se demonstrează că există şi este finită limita $L_n=\lim\limits_{x\to 0}u_n\left(x\right)$, iar în plus, L_n verifică relaţia de recurenţă $L_n=L_{n-1}+n\left(1+\dfrac{1}{e}\right), n\geq 2\Rightarrow L_n=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(e+1\right)}{2e}$.

Extindere și generalizare a unei probleme de concurs

Prof. Dr. Marian HAIDUCU
Școala Gimnazială "Mihai Eminescu" Pitești

Punctul de plecare al acestei note matematice îl constituie problema propusă de domnul profesor *Laurențiu Panaitopol* la faza finală a Olimpiadei Naționale de Matematică din 1988.

Problema. Se consideră triunghiul echilateral ABC **de latură 1 și punctele** $A_1 \in (BC), B_1 \in (AC)$ şi $C_1 \in (AB)$**. Arătați că** $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geq \frac{3}{4}$.

Ne propunem să dăm o soluție problemei de mai sus care aplicată pătratului, hexagonului regulat și în general unui poligon regulat de latură 1, să genereze inegalități analoage celei din enunț.

Soluție. (Pentru alte soluții a se vedea [1])

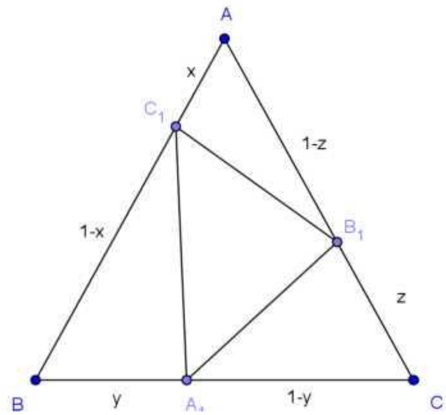


Figura 1.

Notăm $AC_1 = x,\ BA_1 = y$ şi $CB_1 = z;\ x, y, z \in (0,1)$. Atunci, conform ipotezei, $C_1B = 1 - x,\ CA_1 = 1 - y$ şi $AB_1 = 1 - z$.

Conform teoremei cosinusurilor, în triunghiul AC_1B_1, avem succesiv:

$$\cos(\sphericalangle A) = \frac{AC_1^2 + AB_1^2 - C_1B_1^2}{2AC_1 \cdot AB_1},\quad \frac{1}{2} = \frac{x^2 + (1-z)^2 - C_1B_1^2}{2x(1-z)},$$

$$C_1B_1^2 = x^2 + (1-z)^2 - x(1-z).$$

Analog, $A_1C_1^2 = y^2 + (1-x)^2 - y(1-x),\ B_1A_1^2 = z^2 + (1-y)^2 - z(1-y)$.

Din ultimele trei relații, prin adunare membru cu membru, obținem:

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx - 3(x + y + z) + 3.$$

Dar $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$, de unde

$$xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2},$$

și înlocuind în relația de mai sus, obținem:

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 = \frac{3(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2-6(x+y+z)+6}{2}$$

Confom inegalității *Cauchy-Buniakowski-Schwartz,*

$$x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2,$$

prin urmare are loc următorul șir de inegalităti:

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \ge (x+y+z)^2 - 3(x+y+z)+3,$$

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \ge (x+y+z)^2 - 2\cdot\frac{3}{2}(x+y+z) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3,$$

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \ge \left(x+y+z-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \ge \frac{3}{4}.$$

Egalitate are loc atunci când avem egalitate în toate inegalitățile folosite, mai exact când avem egalitate în inegalitatea *Cauchy-Buniakowski-Schwartz,* adică $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, și când avem egalitate în inegalitatea $\left(x+y+z-\frac{3}{2}\right)^2 \ge 0$ adică $x+y+z = \frac{3}{2}$. Prin urmare avem egalitate când $x = y = z = \frac{1}{2}$, echivalent cu A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor (BC), (AC) respectiv (AB).

Extindere 1. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură 1 și punctele $P_1 \in (AB), P_2 \in (BC), P_3 \in (BC)$ şi $P_4 \in (DA)$.

Arătați că $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + P_4P_1^2 \ge 2$.

Soluție:

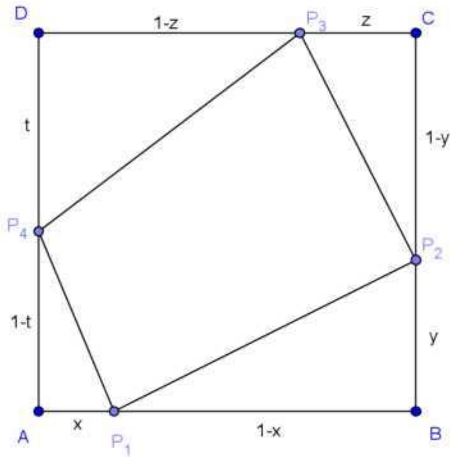


Figura 2.

Notăm $AP_1 = x, BP_2 = y, CP_3 = z$ si $DP_4 = t;\ x, y, z, t \in (0,1).$ Atunci, conform ipotezei, $P_1B = 1 - x, P_2C = 1 - y, P_3D = 1 - z$ şi $P_4A = 1 - t.$

Conform teoremei lui Pitagora, în triunghiul P_1BP_2, avem $P_1P_2^2 = (1-x)^2 + y^2$ și analog, $P_2P_3^2 = (1-y)^2 + z^2$, $P_3P_4^2 = (1-z)^2 + t^2$, $P_4P_1^2 = (1-t)^2 + x^2$.

Din ultimele patru relații, prin adunare membru cu membru, obținem:

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + P_4P_1^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2(x + y + z + t) + 4.$$

Conform inegalității *Cauchy-Buniakowski-Schwartz,*

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \ge \frac{1}{4}(x + y + z + t)^2,$$

prin urmare are loc următorul șir de inegalități:

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + P_4P_1^2 \ge \frac{1}{2}(x + y + z + t)^2 - 2(x + y + z + t) + 4,$$

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + P_4P_1^2 \ge \frac{1}{2}\Big((x + y + z + t)^2 - 4(x + y + z + t) + 8\Big),$$

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + P_4P_1^2 \ge \frac{1}{2}\Big((x + y + z + t - 2)^2 + 4\Big),$$

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + P_4P_1^2 \ge 2.$$

Egalitate are loc atunci când avem egalitate în toate inegalitățile folosite, mai exact când, $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=\frac{t}{1}$ şi $x+y+z+t=2$ adică $x=y=z=t=\frac{1}{2}$.

Prin urmare, avem egalitate în relația din enunț, dacă și numai dacă P_1,P_2,P_3,P_4 sunt mijloacele segmentelor $(AB),(BC),(CD)$ respectiv (DA).

Extindere 2. Se consideră hexagonul regulat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ de latură *1* și punctele $P_i\in(A_iA_{i+1}),\ 1\le i\le 5,\ P_6\in(A_6A_1)$. Arătați că:

$$P_1P_2^2+P_2P_3^2+P_3P_4^2+P_4P_5^2+P_5P_6^2+P_6P_1^2\ge\frac{9}{2}.$$

Soluție:

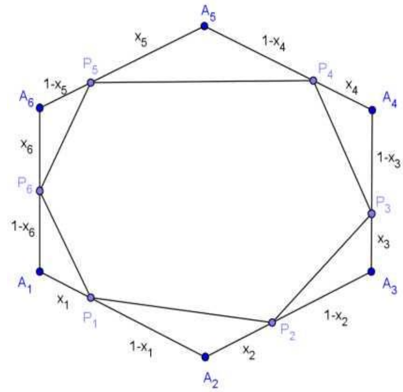


Figura 3.

Notăm $A_iP_i=x_i, x_i\in(0,1),\ \ 1\le i\le 6,$

Atunci, conform ipotezei, $P_iA_{i+1}=1-x_i$, $1\le i\le 5,\ \ P_6P_1=1-x_6$. Cum $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hexagon regulat, $m(\sphericalangle A_1A_2A_3)=120^o$. Conform teoremei cosinusurilor în triunghiul $P_1A_2P_2$, avem succesiv:

$$\cos\left(\sphericalangle P_1A_2P_2\right)=\frac{P_1A_2^2+A_2P_2^2-P_1P_2^2}{2P_1A_2\cdot A_2P_2},\quad -\frac{1}{2}=\frac{(1-x_1)^2+x_2^2-P_1P_2^2}{2(1-x_1)x_2},$$

$$P_1P_2^2=x_1^2+x_2^2-x_1x_2-2x_1+x_2+1.$$

Analog se obțin celelalte cinci relații, de unde, prin adunare membru cu membru, notând, $S=P_1P_2^2+P_2P_3^2+P_3P_4^2+P_4P_5^2+P_5P_6^2+P_6P_1^2$ obținem:

$$S=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)-(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_1)-$$
$$-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+6.$$

Conform inegalității mediilor, pentru $x_1,x_2\in(0,1)$, avem

$$-x_1x_2\ge-\frac{x_1^2+x_2^2}{2},$$

și analoagele, iar conform inegalității *Cauchy-Buniakowski-Schwartz,*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2 \geq \frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2,$$

prin urmare are loc următorul șir de inegalități:

$$S \geq 2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)-\frac{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)}{2}-$$
$$-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+6,$$
$$S \geq (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+6,$$
$$S \geq \frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+6,$$
$$S \geq \frac{1}{6}\left((x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2-6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+36\right),$$
$$S \geq \frac{1}{6}\left((x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2-2\cdot 3\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+3^2+27\right),$$
$$S \geq \frac{1}{6}\left((x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6-3)^2+27\right),$$
$$P_1P_2^2+P_2P_3^2+P_3P_4^2+P_4P_5^2+P_5P_6^2+P_6P_1^2 \geq \frac{9}{2}.$$

Egalitatea are loc atunci când avem egalitate în toate inegalitățile folosite, mai exact când, avem egalitate in toate ineglitățile mediilor folosite

$$x_1^2=x_2^2,\, x_2^2=x_3^2,\, x_3^2=x_4^2,\, x_4^2=x_5^2,\, x_5^2=x_6^2 \text{ și } x_6^2=x_1^2$$

respectiv egalitate în inegalitatea *Cauchy-Buniakowski-Schwartz,*

$$\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{1}=\frac{x_3}{1}=\frac{x_4}{1}=\frac{x_5}{1}=\frac{x_6}{1}$$

și egalitate în inegalitatea $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6-3)^2 \geq 0$, de unde,

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=\frac{1}{2},$$

Prin urmare, avem egalitate în relația din enunț, dacă și numai dacă $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ sunt mijloacele segmentelor $(A_1A_2), (A_2A_3), (A_3A_4), (A_4A_5), (A_5A_6)$ respectiv (A_6A_1).

Generalizare. Se consideră poligonul regulat $A_1A_2A_3...A_n$, $n \geq 3$, de latură 1 și punctele $P_i \in (A_iA_{i+1})$, $1 \leq i \leq n-1$, $P_n \in (A_nA_1)$. Arătați că:

$$P_1P_2^2+P_2P_3^2+P_3P_4^2+...+P_{n-1}P_n^2+P_nP_1^2 \geq n\cdot\sin^2\frac{\pi(n-2)}{2n}$$

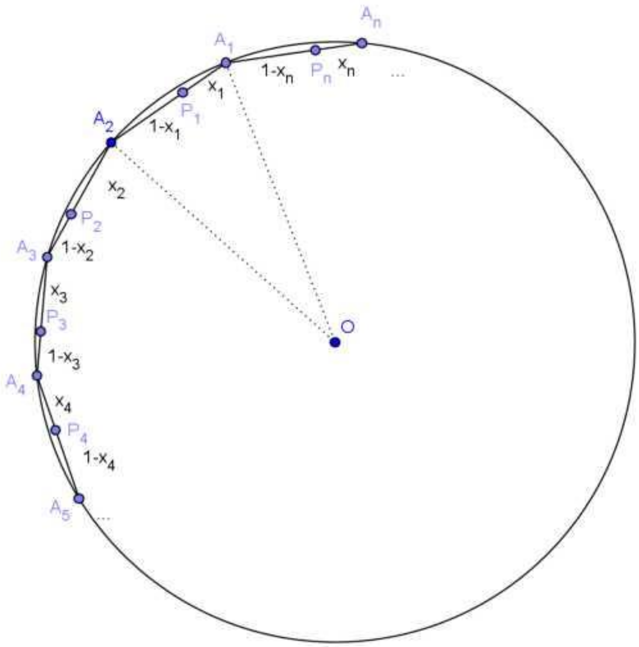


Figura 4.

Fie O centrul cercului circumscris poligonului. Notăm $A_iP_i = x_i, x_i \in (0,1), 1 \le i \le n.$

Atunci, conform ipotezei, $P_iA_{i+1} = 1 - x_i,\ 1 \le i \le n-1,\ P_nP_1 = 1 - x_n$.

Din $OA_1 = OA_2$, deducem că triunghiul OA_1A_2 este isoscel de bază $[A_1A_2]$ și cum $m(\sphericalangle A_1OA_2) = \dfrac{2\pi}{n}$, deducem că $\alpha = m(\sphericalangle A_1A_2O) = \dfrac{\pi(n-2)}{2n}$,

Conform teoremei cosinusurilor în triunghiul $P_1A_2P_2$, avem succesiv:

$$\cos\left(\sphericalangle P_1A_2P_2\right) = \frac{P_1A_2^2 + A_2P_2^2 - P_1P_2^2}{2P_1A_2 \cdot A_2P_2},\ \cos\alpha = \frac{(1-x_1)^2 + x_2^2 - P_1P_2^2}{2(1-x_1)x_2},$$

$$P_1P_2^2 = (1-x_1)^2 + x_2^2 - 2(1-x_1)x_2\cos\alpha.$$

Analog se obțin celelalte $n-1$ relații, de unde, prin adunare membru cu membru, notând, $S = P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + \ldots + P_{n-1}P_n^2 + P_nP_1^2$ obținem:

$$S = 2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2\cos\alpha(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) - 2(1+\cos\alpha)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n.$$

Conform inegalității mediilor, pentru $x_1, x_2 \in (0,1)$, avem $x_1x_2 \le \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, relațiecare înmulțită cu $\cos\alpha$, număr strict negativ pentru orice $n \ge 5$, implică

$$x_1x_2\cos\alpha \geq \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\cos\alpha,$$

și analoagele. Conform inegalității *Cauchy-Buniakowski-Schwartz*,

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geq \frac{1}{6}(x_1+x_2+..+x_n)^2,$$

prin urmare are loc următorul șir de inegalități:

$$S \geq 2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+2\cos\alpha\frac{2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{2}-2(1+\cos\alpha)(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n,$$

$$S \geq 2(1+\cos\alpha)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-2(1+\cos\alpha)(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n,$$

$$S \geq \frac{2}{n}(1+\cos\alpha)(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2-2(1+\cos\alpha)(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n,$$

$$S \geq \frac{2}{n}(1+\cos\alpha)\left((x_1+x_2+\ldots+x_n)^2-n(x_1+x_2+\ldots+x_n)+\frac{n^2}{2(1+\cos\alpha)}\right),$$

$$S \geq \frac{2}{n}(1+\cos\alpha)((x_1+x_2+\ldots+x_n)^2-2\cdot\frac{n}{2}(x_1+x_2+\ldots+x_n)+\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n^2}{2(1+\cos\alpha)}),$$

$$S \geq \frac{2}{n}(1+\cos\alpha)\left((x_1+x_2+\ldots+x_n-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2(1-\cos^2\frac{\alpha}{2})}{4\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$S \geq \frac{4}{n}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\left((x_1+x_2+\ldots+x_n-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$S \geq \frac{4}{n}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\left((x_1+x_2+\ldots+x_n-\frac{n}{2})\right)^2+n\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$P_1P_2^2+P_2P_3^2+P_3P_4^2+\ldots+P_{n-1}P_n^2+P_nP_1^2 \geq n\cdot\sin^2\frac{\pi(n-2)}{2n}.$$

Egalitatea are loc atunci când avem egalitate în toate inegalitățile folosite, mai exact când, avem egalitate în toate inegalitățile mediilor folosite $x_1^2=x_2^2, x_2^2=x_3^2,\ldots,x_{n-1}^2=x_n^2$ și $x_n^2=x_1^2$,

egalitate în inegalitatea *Cauchy-Buniakowski-Schwartz*, $\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{1}=\ldots=\frac{x_n}{1}$, și

egalitate în inegalitatea $(x_1+x_2+\ldots+x_n-\frac{n}{2})^2 \geq 0$, de unde,

$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{2}$,

Prin urmare, avem egalitate în relația din enunț, dacă și numai dacă $P_1, P_2, ..., P_n$ sunt mijloacele segmentelor $(A_1A_2), (A_2A_3), ..., (A_{n-1}A_n)$ respectiv (A_nA_1).

Observație. Cu toate că raționamentul este valabil pentru $n \geq 5$, obsevăm că, particularizând $n = 3$ și $n = 4$ obținem rezultatele corespunzătoare acestor cazuri. Pentru $n = 3$, obținem relația din problema inițială pentru triunghiul echilateral de latură 1:

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_1^2 \geq 3 \cdot \sin^2 \frac{\pi(3-2)}{2 \cdot 3} = 3 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{6} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Pentru $n = 4$, obținem relația din extinderea problemei inițiale la cazul pătratului de latură 1:

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + P_4P_1^2 \geq 4 \cdot \sin^2 \frac{\pi(4-2)}{2 \cdot 4} = 4 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2.$$

Bibliografie

[1] S. Simion, Ș. Alexe, M. Chirciu, I. Dinulescu, D. Barâcă și G. Pendiuc *Caiet metodic de matematică. Lucrare dedicată Centenarului revistei "Gazeta Matematică"*, Editura Hardiscom, Pitești, 1995, pag. 15.

Probabilităţi geometrice

Prof. Ștefănuț Ciochină
Școala Gimnazială "I. L. Caragiale", Brăila

1. Introducere

Probabilitatea realizării unui eveniment reprezintă raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile. Această definiție, însă, implică faptul că într-un fel sau altul putem număra cazurile posibile și pe cele favorabile. În această notă, se vor utiliza în calculul probabilităților realizării unui anumit eveniment, măsuri geometrice.

2. Aplicații practice ale probabilităților geometrice

În acest paragraf vom prezenta câteva probleme care se rezolvă utilizând noțiunea de probabilitate geometrică.

2.1. Utilizarea lungimii unui segment pentru a găsi probabilitatea geometrică

1. Fie x un număr real din intervalul $(0;100)$. Care este probabilitatea ca $\left[\sqrt{x}\right]$ să fie număr par? ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a).

Soluție:

Observăm că $0<\sqrt{x}<10$, ceea ce conduce la:

$\left[\sqrt{x}\right]=0,\ x\in(0;1)\Rightarrow$ lungimea intervalului este egală cu 1;

$\left[\sqrt{x}\right]=2,\ x\in[4;9)\Rightarrow$ lungimea intervalului este egală cu 5;

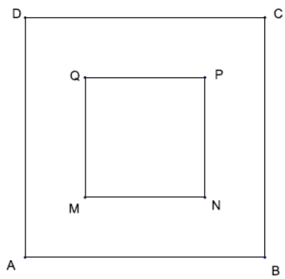
…

$\left[\sqrt{x}\right]=8,\ x\in[64;81)\Rightarrow$ lungimea intervalului este egală cu 17.

În concluzie, spațiul evenimentelor posibile este $(0;100)$, iar spațiul evenimentelor favorabile este $(0;1)\cup[4;9)\cup...\cup[64;81)\Rightarrow p=\dfrac{45}{100}$.

2.2. Utilizarea ariei în calculul probabilităților geometrice

1. Într-un pătrat de latură 5 cm se aruncă o monedă cu diametrul 1 cm (presupunem că toate monedele aruncate ajung în interiorul pătratului). Care este probabilitatea ca moneda să ajungă în pătrat fără să atingă laturile pătratului?



Soluție:

Modelând problema geometric, se poate observa că spațiul evenimentelor posibile îl reprezintă pătatul *ABCD*, iar spațiul evenimentelor favorabile este dat de pătratul din interior, *MNPQ*.

Astfel:

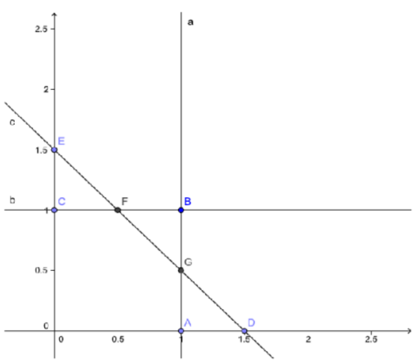
$$p = \frac{aria\ pătratului\ MNPQ}{aria\ pătratului\ ABCD}$$

$$\Rightarrow p = \frac{16}{25}.$$

2.3. Utilizarea coordonatelor în calculul probabilităților geometrice

1. Alegând la întâmplare două numere reale, *x* și *y*, astfel încât $0 < x < 1$ și $0 < y < 1$, calculați probabilitatea ca $x + y \geq \frac{3}{2}$.

Soluție:



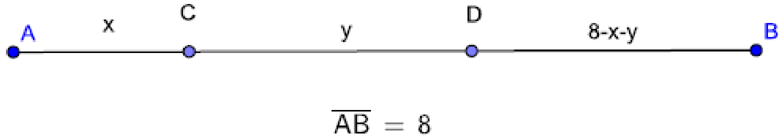
Din $0 < x < 1$ și $0 < y < 1$ obținem în sistemul de coordonate pătratul *OABC*.

Impunând condiția $x + y \geq \frac{3}{2}$ se obține cu ușurință probabilitatea căutată

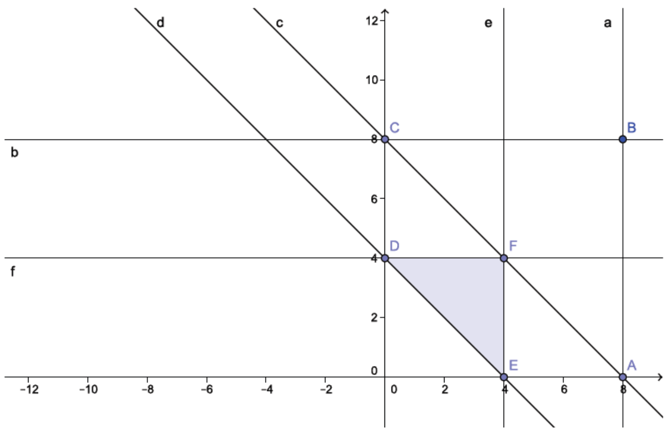
$$p = \frac{A_{\Delta CBF}}{A_{OABC}} = \frac{1}{8}.$$

2. Pe un segment de lungime 8 cm, alegem în mod aleator două puncte. Care este probabilitatea ca cele trei segmente astfel formate să formeze un triunghi?

Soluție:



Utilizând figura putem reformula problema astfel: care este probabilitatea ca segmentele $[AC],[CD],[DB]$ să poată fi laturile unui triunghi? În continuare utilizăm sistemul de coordonate pentru a rezolva problema. Faptul că, AC și CD pot avea lungimea de cel mult 8 cm îl reprezentăm în sistemul de coordonate sub forma pătratului $OABC$. Dar, $x+y<8$, ceea ce conduce la reducerea spațiului evenimentelor posibile la triunghiul OAC.



Impunând condițiile de existență a triunghiului:

1) $x+y>8-x-y$; 2) $x+(8-x-y)>y$; 3) $y+(8-x-y)>x$.

Obținem $p=\dfrac{A_{\Delta EFD}}{A_{\Delta OAC}}=\dfrac{8}{32}$.

Bibliografie

1. Art Johnson, *Geometric probability*, COMAP, Inc, 1995.
2. Jerry Bobraw, *Mastering the SAT math*, wilew publishing, Inc 2007.
3. Viorel Petrehus, Sever Angel Popescu, *Probabilități și statistică*, UTC București 2005.
4. www.artofproblemsolving.com.
5. www.nexuslearning.net.

Reducerea la primul cadran

Prof. Emilian Runceanu
Colegiul Naţional "Ana Aslan" Brăila

Reducerea la primul cadran pentru funcţiile trigonometrice ale unor unghiuri care depăşesc acest cadran este prezentată în manuale cu ajutorul cercului trigonometric, într-o formă destul de greoaie şi care nu este reţinută decât de elevii cei mai buni.

Eu voi prezenta aici o modalitate mult mai simplă şi care din experienţa mea este uşor reţinută de toţi elevii.

Iată despre ce este vorba: mai întâi se exprimă unghiul cu ajutorul extremităţilor cadranului din care face parte şi a unui unghi din primul cadran (ascuţit), apoi se stabileşte semnul funcţiei respective în acel cadran şi în final dacă unghiul este exprimat cu ajutorul lui $\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2}$, respectiv 90^0 sau 270^0, sau mai general un număr impar de $\frac{\pi}{2}$ sau de 90^0, atunci funcţia trigonometrică respectivă se schimbă în cofuncţie, adică: sinusul în cosinus, cosinusul în sinus, tangenta în cotangentă şi cotangenta în tangenta unghiului ascuţit.

Dacă unghiul este exprimat cu ajutorul lui π sau 2π, respectiv 180^0 sau 360^0, sau mai general cu ajutorul unui număr par de $\frac{\pi}{2}$ sau de 90^0, atunci funcţia rămane neschimbată.

Iată câteva exemple:

1) $\cos 120^0 = \cos(90^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$, am scris unghiul cu ajutorul uneia din extremităţile cadranului 2, respectiv 90^0,
am stabilit semnul "$-$" al cosinusului în cadranul 2 şi am schimbat funcţia în cofuncţie.

2) Sau aceeaşi funcţie exprimând unghiul cu ajutorul celeilalte extremităţi: $\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$, fiindcă unghiul a fost scris cu ajutorul lui 180^0, funcţia a rămas neschimbată şi bineînţeles că are semnul cosinusului din cadranul 2, adică "$-$".

3) $\sin 135^0 = \sin(90^0 + 45^0) = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sau altfel:

$\sin 135^0 = \sin(180^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $tg150^0 = tg(180^0 - 30^0) = -tg30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sau altfel:

$tg150^0 = tg(90^0 + 60^0) = -ctg60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $ctg225^0 = ctg(180^0 + 45^0) = ctg45^0 = 1$ sau altfel:

$ctg225^0 = ctg(270^0 - 45^0) = tg45^0 = 1$

6) $\sin 210^0 = \sin(180^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$ sau altfel:

$\sin 210^0 = \sin(270^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$

7) $\cos 240^0 = \cos(270^0 - 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$ sau altfel:

$\cos 240^0 = \cos(180^0 + 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$

8) $\sin 300^0 = \sin(270^0 + 30^0) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau altfel:

$\sin 300^0 = \sin(360^0 - 60^0) = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

9) $\cos 315^0 = \cos(270^0 + 45^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sau altfel:

$\cos 315^0 = \cos(360^0 - 45^0) = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

10) $tg330^0 = tg(360^0 - 30^0) = -tg30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sau altfel:

$tg330^0 = tg(270^0 + 60^0) = -ctg60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

În următoarele exemple vom considera $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

11) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$, aici $\frac{3\pi}{2}-x$ este în cadranul 3, unde sinusul are semnul " – " şi am schimbat funcţia în cofuncţie.
12) $tg(2\pi-x)=-tgx$, aici $2\pi-x$ este în cadranul 4, unde tangenta are semnul " – " şi nu se schimbă funcţia.

13) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$;

14) $\sin(\pi+x)=-\sin x$;

15) $ctg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-tgx$;

16) $tg(\pi+x)=tgx$;

17) $\cos(\pi-x)=-\cos x$;

18) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$;

19) $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)=\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$;

Mai jos am pus mai întâi în evidenţă perioada $2k\pi$.

20) $\cos(125\pi+x)=\cos(124\pi+\pi+x)=\cos(\pi+x)=-\cos x$

21) $tg(35\pi+x)=tgx$, deoarece $35\pi+x$ ajunge în cadranul 3.

22) $\cos\frac{223\pi}{4}=\cos\left(54\pi+\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

23)

$$\sin 1320^0=\sin(360^0\cdot 3+240^0)=\sin 240^0=\sin(180^0+60^0)=-\sin 60^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

24) Să se aducă la o forma mai simplă expresia:

$$E(x)=\frac{\cos(\pi+x)-\sin(\frac{3\pi}{2}-x)+ctg(\frac{\pi}{2}+x)+tg(2\pi-x)}{tg(\pi-x)+ctg(\frac{3\pi}{2}+x)+\sin(\pi-x)-\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=$$

$$=\frac{-\cos x+\cos x-tgx-tgx}{-tgx-tgx+\sin x-\sin x}=\frac{-2tgx}{-2tgx}=1$$

OLIMPIADE ŞI CONCURSURI

Olimpiada Satelor din Sud-Est, etapa județeană
Brăila, 19 aprilie 2016

În data de 19 aprilie 2016, Filiala Brăila a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România şi Inspectoratul Şcolar Judeţean Brăila, în parteneriat cu Colegiul Tehnic "C. D. Neniţescu" Brăila au organizat ediţia a II-a a Concursului "Olimpiada Satelor din Sud-Est", competiţie adresată elevilor claselor III-VIII, din mediul rural.

La concurs au participat 281 de elevi din 35 de unităţi şcolare din judeţul Brăila, calificaţi în urma susţinerii în fiecare unitate şcolară din judeţul Brăila a etapei locale, 27 februarie 2016.

S-au acordat de către I.S.J. Brăila, conform criteriilor, 15 premii I, 12 premii II, 10 premii III şi 55 de menţiuni. Subiectele şi baremele au fost realizate prof. Ecaterina Bonciu, inspector şcolar, învăţământ primar, clasele III, IV şi prof. Nicolae Cătălin Stănică, inspector şcolar, matematică, clasele V-VIII, ambii preşedinţi executivi ai concursului.

Preşedintele concursului a fost domnul prof. Dan Mihai Gheorghiţă, inspector şcolar general adjunct, I.S.J. Brăila.

Prezentăm în continuare enunţurile problemelor din concurs, precum şi lista premianţilor:

Subiecte, clasa a III-a:

1. Numărul de vizitatori ai Delfinariului din Constanţa din ultimele trei zile ale unei săptămâni este înregistrat în tabelul de mai jos:

ziua / **vizitatori**	**vineri**	**sâmbătă**	**Duminică**
Copii	2476	3258	4030
Adulţi	1758	1432	237

Observă datele din tabel şi calculează:
a) Câţi copii au fost la delfinariu în toate cele 3 zile?
b) Câţi vizitatori au fost sâmbătă?

c) Cu cât este mai mare numărul copiilor care au vizitat delfinariul duminică decât numărul adulților?
d) În care din cele trei zile au fost cei mai puțini vizitatori? Argumentează prin calculele făcute.

2. Calculează $6 \times a - b : 2 + 3 \times c$, ştiind că:
$a = 4 \times 4 : 2 + (24 : 3 + 10 \times 2)$
$b = (39 - 14) \times 4 : 10$
$c = 297 - (17 \times 6 + 180)$

3. Doi frați, Tudor și Matei, au o colecție de roboți. Dacă ar mai avea un robot, ar avea împreună 28 de bucăți. Câți roboţi are fiecare, dacă numărul de roboți ai lui Tudor este dublu față de numărul de roboți pe care îi are Matei?

4. La o fermă sunt 117 animale: capre, vaci și cai. Capre și vaci sunt, împreună, 85. Numărul de cai este de 2 ori mai mic decât cel de capre. Câte animale de fiecare fel sunt în fermă?

Prof. Ecaterina Bonciu

Subiecte, clasa a IV-a:

1. Completează spațiile libere cu semnele operațiilor matematice potrivite (**+**; −; ×; **:**) și paranteze, acolo unde e cazul, pentru a obține rezultatele indicate (nu trebuie folosite obligatoriu toate semnele).
3 3 3 3 = 1
3 3 3 3 = 3
3 3 3 3 = 5
3 3 3 3 = 10
3 3 3 3 = 15
3 3 3 3 = 27
3 3 3 3 = 36

2. Determină numărul necunoscut din exercițiul următor:

$$27 : [2\times13 + (6 \times a - 21) : 9] + 1 = 2$$

3. Ana a economisit o sumă de bani. Ea a mai primit de la tatăl ei 46 lei, iar de la mama cu 19 lei mai puțin. Din toți banii a plătit o excursie, care costă 56 lei, și-a cumpărat un rucsac, care costă cu 27 lei mai puțin decât excursia, și o carte, care costă cu 19 lei mai puțin decât rucsacul. Câți lei a economisit Ana, dacă după toate cumpărăturile mai are 11 lei?

4. La un concurs de șah s-au înscris băieți și fete. Numărul băieților este cu 1 mai mare decât jumătate din numărul fetelor. După prima probă, sunt eliminați 6 băieți și 5 fete, rămânând în concurs de 3 ori mai multe fete decât băieți. Câte fete și câți băieți s-au înscris la concurs?

Prof. Ecaterina Bonciu

Subiecte, clasa a V-a:

1. Se consideră mulţimea $A=\{x/x=3n+1, n\in\mathbb{N},\ n\geq 5\}$. Calculaţi suma celor mai mici 30 de elemente ale mulţimii *A*.

Prof. Adriana Mihăilă, Daniela Tilincă

2. Împărţind numărul $\overline{abc}$ la $\overline{bc}$ obţinem câtul 4 şi restul a. Arătaţi că $b=c$.

Prof. Daniela Stănică

3. Determinați numerele naturale *n* și *p* care verifică relația $n\cdot p=15+n^2$.

Prof. Anda Crăcan

4. Nicu are 100 de bile, albe sau negre. Dorind să aibă numai bile albe, el face schimb cu prietenul său Mitică. Acesta oferă o bilă albă pentru fiecare trei bile negre. După efectuarea schimbului, Nicu are 40 de bile albe. Determinaţi numărul de bile albe pe care l-a avut Nicu iniţial.

Gazeta Matematică

Subiecte, clasa a VI-a:

1. Determinaţi numerele raţionale *a, b, c* ştiind că numerele *a* şi *b* sunt direct proporţionale cu $\frac{1}{5}$ şi $\frac{2}{9}$, iar numerele *b* şi *c* sunt invers proporţionale cu $\frac{2}{3}$ şi $\frac{1}{8}$, iar $20a+b+3c=700.$

2. Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle AOC$ neadiacente, suplementare şi $B\in \text{Int}(\sphericalangle AOC)$. Dacă $m(\sphericalangle BOC)=60^\circ$, atunci determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle AOC$.

3. Se consideră cifrele nenule a, b, c astfel încât $a+b$, $b+c$, $c+a$ sunt pătrate perfecte. Demonstrați că suma $a+b+c$ nu este divizibilă cu 5.

Prof. Daniela şi Nicolae Stănică

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB=AC$). Fie punctele M şi N pe dreapta BC, astfel încât $B\in(MC)$, $C\in(BN)$ şi $MB=CN$. Dacă P este simetricul lui M faţă de dreapta AB, atunci demonstraţi că triunghiul APN este isoscel.

Gazeta Matematică

Subiecte, clasa a VII-a:

1. Dacă $(2x+4)^2-(x-3)^2=(x+a)(3x+b)$, pentru orice număr real x, atunci determinaţi valoarea sumei $a+b$.

2. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ $(AB\,||\,DC)$, $AB=3\cdot CD=18$ cm şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Determinaţi aria trapezului $ABCD$ şi distanţa de la punctul A la dreapta BC.

3. ***a)*** Arătaţi că $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3}{2\cdot 3}=2.$

b) Dacă $\frac{3}{2}+\frac{3}{6}+\frac{3}{12}+...+\frac{3}{250-n}=\frac{45}{16}$, atunci determinaţi numărul natural n, $n\neq 250$.

prof. Adelina Ion

4. În triunghiul echilateral ABC avem AB = 6 cm, punctul M este mijlocul laturii [AC], punctul Q este mijlocul segmentului [BM] şi $PQ\,||\,AB$, $P\in(BC)$.

a) Arătaţi că $QP=1,5$ cm. ***b)*** Determinaţi aria patrulaterului $AQPB$.

Prof. Daniela şi Nicolae Stănică

Subiecte, clasa a VIII-a:

1. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi $AC\cap BD=\{O\}$. Determinaţi măsura unghiului format de dreptele $A'O$ şi $B'C$.

Prof. Mirela Tarţa

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2x-8}{x^2-8x+15}-\frac{1}{x-3}\right):\frac{1}{x^2-25}$, unde x este număr real, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,3,5\}$. Arătaţi că $E(x)=x+5$, pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,3,5\}$.

3. Determinaţi numerele reale *x, y, z, u* ştiind că

$$x+y+z+u-6=\frac{x^2+y^2+z^2+u^2}{6}.$$

Prof. Dănuţ Marius Necula

4. Se consideră tetraedrul regulat *VABC* cu muchia de 6 cm. Dacă $M\in(VC)$, $P\in(VA)$, $S\in(VB)$ astfel încât:

$$4\cdot d\left(S,(VAC)\right)=3\cdot d\left(P,(VBC)\right)=2\cdot d\left(M,(VBA)\right)=2\sqrt{6}\text{ cm}.$$

Calculaţi perimetrul triunghiului *SPM* .

Prof. Daniela şi Nicolae Stănică

Premianţii concursului

Clasa a III-a: Premiul I: Dobrincu Larisa, Şc. Gimn. Chiscani, Drenea Mădălina, Şc. Gimn. Bordei-Verde, Olteanu Claudiu, Şc. Gimn. "Petre Carp", Tufeşti, Robitu Sara Viviana, Şc. Gimn. Ciocile, Roşca Gabriel, Şc. Gimn. Gropeni, Sorescu Denisa, Şc. Gimn. "Petre Carp", Tufeşti; **Premiul al II-lea**: Dîrnea Răzvan, Şc. Gimn. Chiscani, Mocanu Teodora, Şc. Gimn. Vădeni, **Premiul al III-lea:** Burada Ştefania, Şc. Gimn. Surdila Găiseanca, Novac Bianca, Şc. Gimn. "Petre Carp", Tufeşti, Spînu Dragoş, Şc. Gimn. "Petre Carp", Tufeşti

Clasa a IV-a: Premiul I: Toader Andrei, Şc. Gimn. "Toma Tîmpeanu", Galbenu; **Premiul al II-lea**: Mihăilă Mădălin, Şc. Gimn. Movila Miresii; **Premiul al III-lea:** Tănase Claudiu, Şc. Gimn. Şuţeşti

Clasa a V-a: Premiul I: Dumitru Iulian, Şc. Gimn. Tichileşti, Mihai Carmen Nicoleta, Şc. Gimn. Cireşu, Moisoiu Mirela, Şc. Gimn. Bordei-Verde, Trandafir Mădălin. Şc. Gimn. Movila Miresii, Sabou Ioan-Alexandru, Şc. Gimn. Gemenele; **Premiul al II-lea**: Bordei Mirela, Şc. Gimn. Ulmu, Bratosin Ionuţ, Şc. Gimn. Surdila Găiseanca, Buruiană Tania, Şc. Gimn. Bordei Verde, Jercăianu Rebeca, Şc. Gimn. Movila Miresii, Mocanu Daria, Şc. Gimn. Surdila

Greci; **Premiul al III-lea:** Oancea Antonio-Gabriel, Şc. Gimn. Roşiori, Radu Ion, Şc. Gimn. Vădeni, Berceanu Mariana, Şc. Gimn. Movila Miresii

Clasa a VI-a: Premiul I: Ionescu Alexandru, Şc. Gimn. Victoria; **Premiul al II-lea**: Oprea Dumitrel Ionel, Şc. Gimn. Chiscani, Petrea Georgiana Simona, Şc. Gimn. Vişani; **Premiul al III-lea:** Ghinea Larisa, Liceul Tehn. “Matei Basarab” Măxineni

Clasa a VII-a: Premiul I: Dîrnea Sorina Liliana, Şc. Gimn. Chiscani; **Premiul al II-lea**: Barbu Alina, Liceul Tehn. “Matei Basarab” Măxineni **Premiul al III-lea:** Popa Lăcrmioara Luciana, Şc. Gimn. Chiscani

Clasa a VIII-a: Premiul I: Frăţilă Ionuţ, Şc. Gimn. “Petre Carp” Tufeşti; **Premiul al II-lea**: Butiseacă Mina, Şc. Gimn. Vişani; **Premiul al III-lea:** Plopeanu Victoria, Şc. Gimn. Vişani

CONSIDERAŢII METODICE

Gradul didactic II, metodica predării specialității, probă scrisă
Universitatea din Bucureşti, facultatea de matematică şi informatică
29 august 2016

Problema 1:

Prof. Mădălina Teodorescu
Liceul Pedagogic "D. P. Perpessicius" Brăila

Dacă $A=\left\{a+bi\,\middle|\,a,b\in\mathbb{N}^*\right\}$, atunci pentru orice $z\in A$, există $n\in\mathbb{N}^*$ cu $z^n\notin A$.

a) Verificați pe două cazuri particulare dacă problema este adevărată.

b) Ce rol ar avea, în rezolvarea la clasă a problemei, studiul cazurilor particulare?

c) Rezolvați problema.

d) Anticipați două dificultăți pe care le-ar putea avea elevii în rezolvarea problemei.

e) Reformulați enunțul problemei astfel ca noua problemă să poată fi rezolvată folosind același argument.

Soluţie:

a) pentru $z_1=1+i$ avem $z_1{}^2=2i$ deci, pentru $n=2$, $z_1{}^2\notin A$

pentru $z_2=2+i$ avem $z_2{}^4=-7+24i$ deci, pentru $n=4$, $z_2{}^4\notin A$.

b) Studiul cazurilor particulare ar ajuta la intuirea metodei de rezolvare. De exemplu, putem observa că, pentru $a=b$, $z^2\notin A$, iar pentru $a<b$, $z^2\notin A$. Astfel, studiul cazurilor particulare ne sugerează să tratăm problema astfel:

cazul $a=b$ implică $z=a+ai=a(1+i)$ de unde rezultă $z^2=2a^2i$ care nu aparține mulțimii *A* deoarece partea reală este nulă.

cazul $a<b$ implică $a^2<b^2$ de unde rezultă că $z^2=\left(a^2-b^2\right)+2ab\cdot i$, $z^2\notin A$ pentru că partea reală este număr negativ.

Deci, pentru $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{N}^*, a\le b$, găsim $n=2$;

cazul $a > b$ rămâne de studiat.

De asemenea, se mai poate observa, tot din cazurile particulare, următorul rezultat: $z_1 = a + bi$ și $z_2 = c + di$, $z_1, z_2 \in A$ implică $z_1 \cdot z_2 = ac - bd + i(ad + bc)$. Cum $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ rezultă $ad + bc \in \mathbb{N}^*$.

În concluzie, studiul cazurilor particulare ne ajută să rezolvăm măcar o parte din problemă.

c) Fie $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$. Punctul $M(a, b)$ aparține cadranului I. Vom scrie numărul complex sub formă trigonometrică: $z = r(\cos t + i \sin t)$, cu $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$, și $t = arctg \dfrac{b}{a} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Căutăm acum un număr natural nenul n pentru care $z^n \notin A$.

Cum $z^n = r^n(\cos nt + i \cdot \sin nt)$ rezultă că $z^n \notin A$ dacă găsim un $n \in N^*$ pentru care $\cos nt < 0$ sau $\sin nt < 0$.

Demonstrăm că există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{\pi}{2} < nt < 2\pi$.

Inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{\pi}{2t} < n < \dfrac{2\pi}{t}$. Aleg $n_0 = \left[\dfrac{\pi}{2t}\right] + 1 \in N$.

Acesta există în intervalul $\left(\dfrac{\pi}{2t}, \dfrac{2\pi}{t}\right)$ deoarece $\dfrac{2\pi}{t} - \dfrac{\pi}{2t} = \dfrac{3\pi}{2t} > 3$, adevărată din $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Astfel, pentru $n_0 = \left[\dfrac{\pi}{2t}\right] + 1$, $n_0 t$ aparține cadranelor II, III sau IV, unde $\cos n_0 t < 0$ sau $\sin n_0 t < 0$, adică $z^{n_0} \notin A$.

Observație: considerând această demonstrație pentru cazul $a > b$, obținem $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$. Atunci $\dfrac{2\pi}{t} - \dfrac{\pi}{2t} = \dfrac{3\pi}{2t} > 6$.

d) Dacă elevii aleg rezolvarea pe cale algebrică vor întâmpina dificultăți la rezolvarea cazului $a > b$.

La metoda trigonometrică dificultatea intervine în determinarea lui n_0.

e) Arătați că mulțimea $A=\left\{a+bi \middle| a,b\in N^*\right\}$ nu este parte stabilă a mulțimii numerelor complexe în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.

Problema 2

Prof. Mădălina Teodorescu
Liceul Pedagogic "D. P. Perpessicius" Brăila

a) Să se arate că ecuația $x+\ln|x|=0$ are o soluție reală unică $x_0\in(0,1)$. Comentați, din punct de vedere metodic, dificultățile pe care le-ar putea întâmpina elevii în rezolvarea problemei.

b) Fie funcția $f:R-\{x_0\}\to R$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+\ln|x|}, & x\neq 0, x\neq x_0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea în punctul $x=0$. Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*. Precizați, în legătură cu Teorema lui Fermat, ce greșeală ar putea face elevii la determinarea punctelor de extrem ale funcției anterioare.

c) Să se calculeze $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx$. Dați un alt exemplu de integrală definită care să conțină expresia $\frac{1}{x+\ln x}$ și care poate fi calculată prin metoda substituției.

Soluție:

a) Considerăm funcția $h:(0,1]\to R$, $h(x)=x+\ln x$. Modulul inițial dispare deoarece $x>0$. Funcția este continuă pe intervalul $(0,1]$, pe baza operațiilor cu funcții continue. $h'(x)=(x+\ln x)'=\frac{x+1}{x}$ de unde rezultă că funcția este si derivabilă pe intervalul $(0,1]$. Calculăm $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+\ln x)=-\infty$ și $h(1)=1$. Conform Șirului lui Rolle, deoarece funcția nu se mai anulează pe intervalul $(0,1]$, ecuația $x+\ln|x|=0$ are o soluție reală unică $x_0 \in (0,1)$.

Comentarii metodice:

1. Elevii vor întâmpina dificultăți la demonstrarea unicității soluției. De cele mai multe ori ei demonstrează doar existența acesteia bazându-se pe următorul rezultat: "dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă și $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci există cel puțin un punct $\xi\in(a,b)$ astfel încât $f(\xi)=0$", rezultat ce poate fi extins și la intervale deschise sau nemărginite.

Observație: rezultatul enunțat anterior rămâne valabil și dacă funcția are Proprietatea lui Darboux în loc să fie continuă.

2. Dacă se dorește o "mai fină" poziționare a soluției x_0 în intervalul $(0,1)$ se pot calcula valori intermediare ale funcție astfel încât să se obțină valori de semne contrare. De exemplu, $h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1-e}{e}<0$ și $h(1)=1>0$. De aici rezultă că $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. A doua dificultate întâmpinată este, în cazul demonstrării existenței soluției pe baza rezultatului anterior, extinderea rezultatului la intervale deschise sau nemărginite.

4. Din tabelul de variaţie al funcţiei h obţinem: pentru $x\in(0,x_0)$ avem $h(x)<0$ iar pentru $x\in(x_0,1]$ obținem $h(x)>0$.

5. O extindere a rezultatului este: considerăm funcția $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+\ln|x|$. Funcția este continuă pe $\mathbb{R}^*$ pe baza operațiilor cu funcții continue.

$$g(x)=\begin{cases} x+\ln x, & x>0\\ x+\ln(-x), & x<0\end{cases} \text{ și } g'(x)=\frac{x+1}{x} \text{ pentru orice } x\neq 0.$$

Dorim realizarea tabelului de variație al funcție g. Pentru aceasta calculăm limitele:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(-x))=\lim_{x\to\infty}(\ln x-x)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\ln x\right)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x+\ln\left(-x\right)\right)=-\infty \text{ și } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x+\ln x\right)=-\infty$$

Apoi, din $g'\left(x\right)=0$ avem $x=-1$.

b) Studiem continuitatea funcției:

$f:\mathbb{R}\setminus\left\{x_0\right\}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+\ln\left|x\right|}, & x\neq 0, x\neq x_0\\ 0, & x=0\end{cases}$ în punctul $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+\ln\left|x\right|}=\dfrac{1}{-\infty}=0=f\left(0\right)$ de unde deducem că funcția este continuă în punctul $x=0$. Pentru determinarea punctelor de extrem ale funcției studiem derivabilitatea funcției pe domeniul de definiție. Pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,x_0\right\}$ funcția este continuă pe baza operațiilor cu funcții continue. Cum s-a demonstrat și continuitatea în punctul $x=0$ rezultă ca funcția este continuă pe tot domeniul de definiție.

Avem $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+\ln x}, & x>0, x\neq x_0\\ \dfrac{1}{x+\ln\left(-x\right)}, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$ şi, prin derivare,

obținem:

$$f'\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}, & x>0, x\neq x_0\\ -\dfrac{x+1}{x\left[x+\ln\left(-x\right)\right]^2}, & x<0\end{cases}.$$

Pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,x_0\right\}$ funcția este derivabilă. Studiem derivabilitatea în punctul $x=0$:

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x\left(x+\ln(-x)\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\frac{1}{x}}{x+\ln(-x)}\overset{L'H}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-1}{x(1+x)}=+\infty$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x\left(x+\ln x\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{x+\ln x}\overset{L'H}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{-1}{x(1+x)}=-\infty$$

Deducem că funcția nu este derivabilă în punctul $x=0$, punctul $O(0,0)$ fiind un punct de întoarcere pentru graficul funcției. În concluzie, funcția este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0,x_0\}$.

Punctele de extrem local ale funcției sunt $x=-1$, punct de minim local, și $x=0$, punct de maxim local.

Comentarii metodice:

Teorema lui Fermat

Fie I interval deschis și $x_0\in I$ un punct de extrem (local) al unei funcții $f:I\to R$. Dacă funcția f este derivabilă în $x=x_0$ atunci $f'(x_0)=0$.

Revenind, dacă funcția nu este derivabilă în $x=0$ acesta poate fi punct de extrem local al funcției. Este cazul anterior, când $O(0,0)$ este punct de întoarcere al graficului funcției. Teorema lui Fermat afirmă că derivata se anulează doar în punctele de extrem în care funcția este derivabilă.

c) $\displaystyle\int_1^e\frac{x+1}{x(x+\ln x)}dx=\int_1^e\frac{(x+\ln x)'}{x+\ln x}dx=\ln|x+\ln x|\Big|_1^e=\ln(e+1)$.

Alt exemplu de integrală definită care să conțină expresia $\dfrac{1}{x+\ln x}$ și care să poată fi calculată prin metoda substituției este: $\displaystyle\int_1^e\frac{x+1}{x(x+\ln x)^n}dx$, unde $n\in N, n\geq 2$. Se face substituția $x+\ln x=t$ de unde $\dfrac{x+1}{x}dx=dt$. Stabilim și capetele: pentru $x=1$ avem $t=1$, iar pentru $x=e$, $t=e+1$. Integrala devine:

$$\int_1^{e+1}\frac{1}{t^n}dt=-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}\Bigg|_1^{e+1}=-\frac{1}{(n-1)(e+1)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{(e+1)^{n-1}}\right].$$

Problema 3:

Prof. Mirela Tarţa
Şcoala Gimnazială Movila Miresii
Prof. Adelina Ion
Şcoala Gimnazială "Radu Tudoran"

Fie *ABC* un triunghi și *P* un punct situat pe cercul circumscris triunghiului. Fie *L*, *M* și *N* picioarele perpendicularelor duse din punctul *P* pe dreptele *AC*, *BC*, respectiv *AB*. Atunci punctele *L*, *M* și *N* sunt coliniare.

b) Demonstrați acest enunț folosind (eventual) mai multe metode.
c) Enunțați o (posibilă) reciprocă a acestui enunt.
d) Decideți, cu justificare, dacă următorul enunt, este adevărat:
"Printr-un punct P al unui cerc se construiesc coardele $[PA]$, $[PB]$ și $[PC]$. Pe fiecare coardă ca diametru se construiește câte un cerc. Atunci aceste cercuri se intersectează două câte două în trei puncte (diferite de P) coliniare."

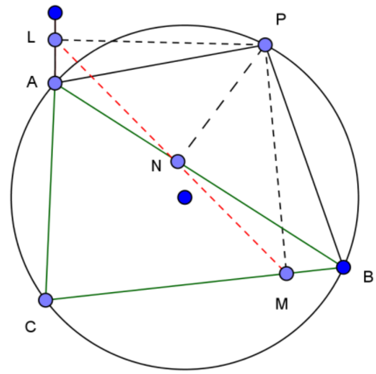
Soluţie.

***b)* Demonstrați acest enunț folosind (eventual) mai multe metode.**
Demonstrație:

Pentru a viziona desenul realizat cu ajutorul aplicației *Geogebra*, se accesează linkul următor: https://www.geogebra.org/m/gPNt6wZK
[GeoGebra (www.geogebra.org) este software-ul gratuit matematică *dinamic* pentru toate nivelurile de educație care aduce împreună geometria, algebra, foi de calcul, grafice, statistici și calcule într-un pachet ușor de utilizat . Învățare interactivă, predare și evaluare a resurselor create cu GeoGebra pot fi împărtășite și utilizate de la www.geogebratube.org.]

Fie $pr_{AB}\{P\}=\{N\}$, $pr_{AC}\{P\}=\{L\}$, $pr_{BC}\{P\}=\{M\}$. Considerăm cazul în care $\Delta\, ABC$ este ascuțitunghic și punctul $P\in AB$, AB care nu conține punctul C. Deoarece $m(\sphericalangle ACB)<90^0 \Rightarrow$ AB care conține punctul P este arc mic$\Rightarrow$ $m(\sphericalangle APB)>90^0 \Rightarrow N\in[AB]$. Dacă $pr_{AC}\{P\}=\{A\}$ și $pr_{BC}\{P\}=\{B\}$ $\Rightarrow$ proiecțiile pe laturile triunghiului, A, N, B sunt coliniare.

- Analizăm cazul în care unul dintre unghiurile $\sphericalangle CBP$ sau $\sphericalangle CAP$ este ascuțit, iar celălalt obtuz .



Considerăm $\sphericalangle CBP$ ascuțit. Atunci rezultă că $M \in (CB)$.

Deoarece $\sphericalangle CAP$ este obtuz, atunci rezultă că $A \in (CL)$.

Din ultimele două afirmații rezultă că proiecțiile M și N se gasesc în semiplane opuse determinate de dreapta AB.

Pentru a demonstra ca *L, N, M* sunt puncte coliniare, folosim Teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf. Mai întâi trebuie să demonstrăm că $\sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle ANL$. În patrulaterul BMNP: $m(\sphericalangle BMP) = m(\sphericalangle BNP) = 90^0 \Rightarrow$ BMNP patrulater inscriptibil(unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă)$\Rightarrow$ $\sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle MPB$ (1). În patrulaterul ANPL : $m(\sphericalangle ANP) = m(\sphericalangle ALP) = 90^0$ și $m(\sphericalangle ANP) + m(\sphericalangle ALP) = 180^0 \Rightarrow$ ANPL patrulater inscriptibil (suma măsurilor a două unghiuri opuse este egală cu 180^0)$\Rightarrow$ $\sphericalangle ANL \equiv \sphericalangle APL$ (2).

În Δ PMB: $m(\sphericalangle MPB) = 90^0 - m(\sphericalangle PBM)$ (3).

În Δ APL: $m(\sphericalangle APL) = 90^0 - m(\sphericalangle PAL)$ (4).

ACBP patrulater inscriptibil$\Rightarrow$ $m(\sphericalangle CBP) = m(\sphericalangle LAP)$ (5).

Din relațiile (3), (4), (5) $\Rightarrow m(\sphericalangle MPB) = m(\sphericalangle APL)$ (6).

Din relațiile (1),(2),(6) obținem: $m(\sphericalangle MNB) = m(\sphericalangle ANL) \Rightarrow \sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle ANL$

Din $\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle ANL$; A, N, B coliniare; M, N puncte de o parte şi de alta a dreptei AB$\Rightarrow$L, M, N puncte coliniare.

Dreapta pe care se se află punctele L, M, N se numește dreapta lui Simson a punctului P în raport cu triunghiul ABC *și se notează* s(P).

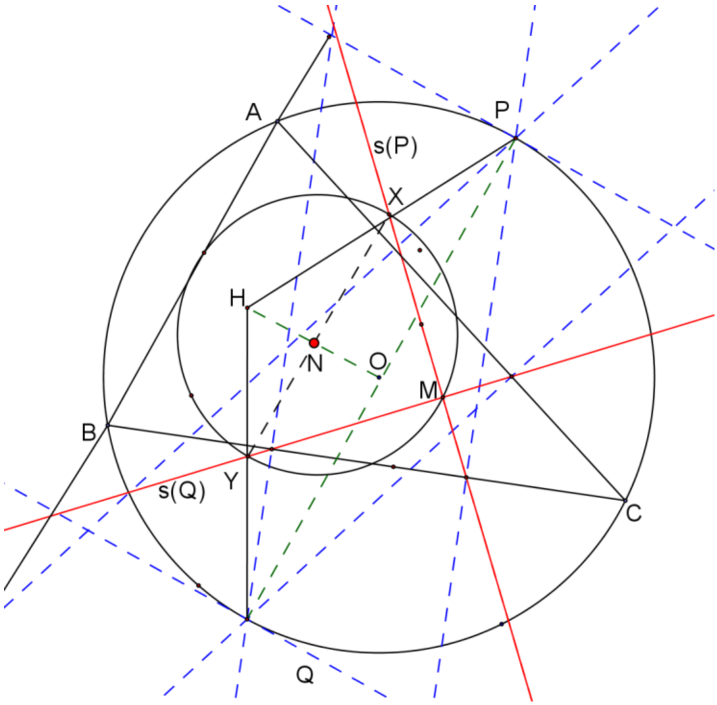
Teorema generalizată a lui Simson: Fie P un punct pe cercul circumscris al triunghiului ABC și fie $L \in AC, M \in BC, N \in AB$. Dacă $\sphericalangle PNB \equiv \sphericalangle PLC \equiv \sphericalangle PMB$ (unghiurile au aceeași orientare) atunci punctele L, M, N sunt coliniare.

Un alt rezultat interesant este prezentat și în următoarea teoremă:

Teoremă : Dacă punctele P și Q sunt diametral opuse pe cercul circumscris al triunghiului ABC și $\{M\}=s(P)\cap s(Q)$, atunci punctul M se află pe cercul celor nouă puncte.

Demonstrația teoremei:

Folosim propozițiile:



Propoziția 1: Dacă P este un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC și H este ortocentrul, atunci mijlocul segmentului $[HP]$ se află pe cercul celor nouă puncte.

Propoziția 2: Dacă P este un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC și H este ortocentrul, atunci mijlocul segmentului $[HP]$ se află pe dreapta $s(P)$.

Din cele două propoziții se deduce că dreapta $s(P)$ intersectează cercul celor nouă puncte în mijlocul segmentului $[HP]$. Fie X acest punct.Analog, dreapta $s(Q)$ intersectează cercul celor nouă puncte în mijlocul segmentului $[HQ]$ în punctul Y.

În ΔHPQ, $[XY]$ este linie mijlocie $\Rightarrow$ $XY \| PQ$ (7)

Fie N centrul cercului celor nouă puncte. Din cadrul demonstrației Propoziției 1 se arată că N este mijlocul lui $[OH]$. În ΔHPO, $[XN]$ este linie mijlocie$\Rightarrow$ $XN \| PO$ (8). Din (7), (8) $\Rightarrow X, N, Y$ sunt puncte coliniare$\Rightarrow [XY]$ este diametru al cercului celor nouă puncte (9).

Observație: Dacă punctele P și Q sunt diametral opuse pe cercul circumscris al triunghiului ABC, atunci $s(P) \perp s(Q)$. (10)

Din (9), (10) $\Rightarrow$ punctul M se află pe cercul celor nouă puncte.

***c)* Enunţaţi o (posibilă) reciprocă a acestui enunţ.**

*Fie un punct P în exteriorul triunghiului ABC şi L, M, N picioarele perpendicularelor duse din punctul P pe dreptele AC, BC, respectiv AB. Dacă punctele L, M, N sunt coliniare, atunci punctul P se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.**(reciproca teoremei lui Simson)***

d)* Decideţi, cu justificare, dacă următorul enunt, este adevărat:** *Printr-un punct P al unui cerc se construiesc coardele [PA], [PB] şi [PC]. Pe fiecare coardă ca diametru se construieşte câte un cerc. Atunci aceste cercuri se intersectează două câte două în trei puncte (diferite de P) coliniare.* ***(prelucrare a teoremei lui Salmon)

***Demonstrație*:**

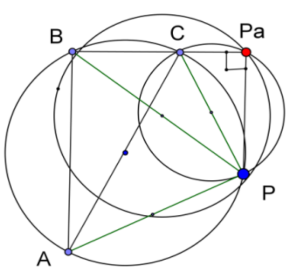
Fie P_a al doilea punct de intersecţie al cercurilor de diametre $[PB]$ şi $[PC]$ $\Rightarrow$

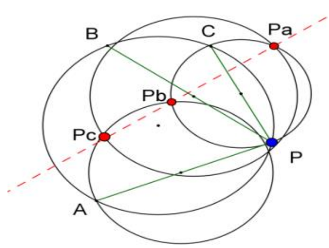
$m(\sphericalangle PP_aB) = m(\sphericalangle PPC_a) = 90^0 \Rightarrow PP_a \perp BC$

Dacă P_b, respectiv P_c sunt al doilea punct de intersecţie al cercurilor de diametre $[PC]$ şi $[PA]$, respectiv $[PA]$ şi $[PB]$ atunci, analog, rezultă că $PP_b \perp CA$ şi $PP_c \perp AB$.

Deci, punctele P_a, P_b şi P_c sunt proiecţiile punctului P pe laturile triunghiului ABC.

Din demonstrația de la subpunctul ***b)***, rezultă că punctele P_a, P_b şi P_c sunt coliniare.





SIMULAREA EXAMENELOR NAȚIONALE

Evaluarea Naţională pentru elevii clasei a VIII-a
Simulare, matematică, 7 decembrie 2016, Brăila

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I - Pe foaia de evaluare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $17-2\cdot 9$ este egal cu ... .

5p **2.** Şase muncitori realizează o lucrare în 12 zile. Trei muncitori realizează aceeaşi lucrare în … zile.

5p **3.** Cel mai mic număr natural de două cifre, divizibil cu 3 este egal cu ... .

5p **4.** În pătratul *ABCD*, măsura unghiului *ABD* este egală cu ... $^\circ$.

5p **5.** În *Figura 1* este reprezentată o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral. Dacă $2\cdot AB+AA'=9$ cm, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor prismei este egală cu … cm.

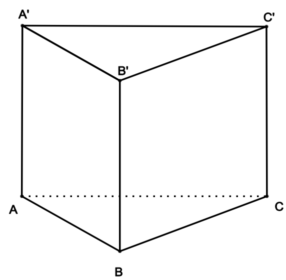


Figura 1

5p **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiţia elevilor unei clase a VIII-a, în funcţie de notele obţinute la teza de matematică pe semestrul I.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	3	5	4	7	3	2	2

Numărul elevilor care au obţinut cel puţin nota 5 este egal cu … .

SUBIECTUL al II–lea -Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenaţi, pe foaia de evaluare, un tetraedru *ABCD*.

5p **2.** Calculaţi media geometrică a numerelor $a=7^{2016}:7^{2014}+2016^0$ şi $b=\frac{5}{3}+0,(3)$.

5p **3.** În prezent, suma vârstelor a doi fraţi este egală cu 36 de ani. Când unul dintre fraţi avea 12 ani, celălalt avea 8 ani. Determinaţi vârstele celor doi fraţi în prezent.

4. Se consideră mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,\|2x-3|\le 5\}$.

5p **a)** Scrieţi sub formă de interval mulţimea *A*.

5p **b)** Enumeraţi elementele mulţimii $A\cap\mathbb{N}$.

5p **5.** Determinaţi suma numerelor reale *a* şi *b* ştiind că $(x+1)^2-4(x+2)-1=(x+a)\cdot(x+b)$, pentru orice *x* număr real.

SUBIECTUL al III–lea - Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete.(30 de puncte)

1. *Figura 2* reprezintă schiţa unui loc de joacă pentru copii, în formă de romb *ABCD*, cu $AB=16\,\text{m}$ şi măsura unghiului BAD de 60°.

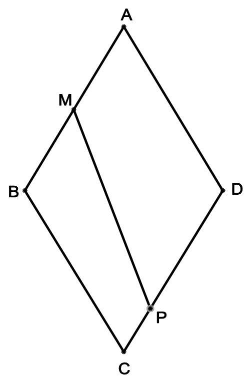


Figura 2

5p **a)** Calculaţi perimetrul rombului *ABCD*.

5p **b)** Arătaţi că aria suprafeţei rombului *ABCD* este egală cu $128\sqrt{3}\,\text{m}^2$.

5p **c)** Dacă punctele *M* şi *P* se află pe segmentele *AB* şi *CD* astfel încât $AB=2\cdot AM$ şi $CD=4\cdot CP$, atunci calculaţi lungimea segmentului *MP*.

2. În *Figura 3* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 6$ cm. Punctul *M* este mijlocul muchiei *AB* şi $AD' \cap A'D = \{O\}$.

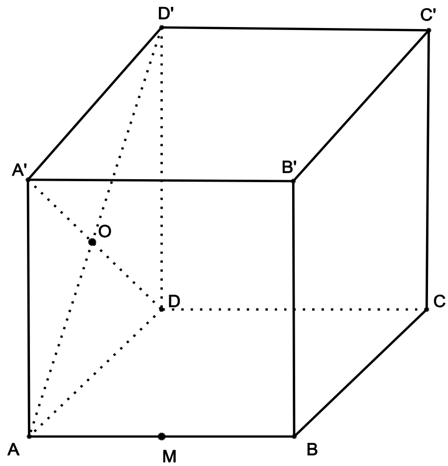


Figura 3

5p **a)** Calculaţi aria triunghiului *MBC*.

5p **b)** Arătaţi că dreapta *OM* este paralelă cu planul (DBB').

5p **c)** Calculaţi sinusul unghiului dintre dreptele *OM* şi BC'.

Evaluarea Naţională pentru elevii clasei a VIII-a
Simulare, matematică, 7 decembrie 2016, Brăila

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	-1	**5p**
2.	24	**5p**
3.	12	**5p**
4.	45	**5p**
5.	27	**5p**
6.	23	**5p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează tetraedrul Notează tetraedrul	**4p** **1p**
2.	$a=7^2+1=50;\ b=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=2$	**3p**
	$m_g=\sqrt{50\cdot 2}=\sqrt{100}=10$	**2p**
3.	$x+y=36,\ x-y=4$	**2p**
	$x=20, y=16$	**3p**
4.	***a)*** $-5\le 2x-3\le 5 \Leftrightarrow -1\le x\le 4 \Leftrightarrow$ $x\in[-1,4]$	**3p** **2p**
	b) $A\cap\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4\}$	**5p**
5.	$(x+1)^2-4(x+2)-1=x^2-2x-8=$	**2p**
	$=x(x-4)+2(x-4)=(x-4)(x+2)$	**2p**
	$(x-4)(x+2)=(x+a)(x+b), \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a+b=-2$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	**a)** $P_{ABCD}=4\cdot l$	**2p**
	$P=4\cdot 16=64\text{m}$	**3p**

	b) ΔBAD echilateral $\Rightarrow A_{\Delta BAD}=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}=64\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$	**3p**
	$A_{ABCD}=2\cdot A_{\Delta BAD}=2\cdot 64\sqrt{3}=128\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$	**2p**
	c) ΔBAD echilateral, DM mediană $\Rightarrow DM\perp AB, AB\parallel CD\Rightarrow DM\perp CD$	**2p**
	$MD=8\sqrt{3}\,\mathrm{m}, PD=12\,\mathrm{m}$	**1p**
	T.P. în triunghiul *MDP*: $MP=\sqrt{MD^2+PD^2}=\sqrt{192+144}=4\sqrt{21}\,\mathrm{m}$	**2p**
2.	**a)** $A_{\Delta MBC}=\dfrac{MB\cdot BC}{2}$	**2p**
	$A_{\Delta MBC}=\dfrac{3\cdot 6}{2}=9\,\mathrm{cm}^2$	**3p**
	b) OM linie mijlocie în $\Delta AD'B\Rightarrow OM\parallel D'B$	**3p**
	$OM\parallel D'B, D'B\subset(DBB')\Rightarrow OM\parallel(DBB')$	**2p**
	c) $OM\parallel D'B\Rightarrow m(\sphericalangle OM,BC')=m(\sphericalangle D'B,BC')=m(\sphericalangle D'BC')$	**2p**
	$\Delta D'BC'$ dreptunghic ($D'C'\perp(BCC')$) şi $BC'=6\sqrt{2}\,\mathrm{m}, D'C'=6\,\mathrm{m}\overset{T.P.}{\Rightarrow}D'B=6\sqrt{3}\,\mathrm{m}$	**2p**
	$\sin(\sphericalangle D'BC')=\dfrac{D'C'}{D'B}=\dfrac{6}{6\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	**1p**

Simulare, Bacalaureat, 7 decembrie 2016, Brăila
Proba E. c)
Matematică *M_mate_info*

Filiera teoretică: profilul real, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**

<u>SUBIECTUL I (30 de puncte)</u>

5p	**1.** Determinaţi numerele complexe z ştiind că $z \cdot \overline{z} - 3z = -1 - 3i$.
5p	**2.** Se consideră funcţiile: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 2m, g(x) = x - 3m + 1$. Determinaţi numărul real m ştiind că $(g \circ f)(1) = 3$.
5p	**3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 2$.
5p	**4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele distincte.
5p	**5.** În sistemul de axe ortogonale *xOy* se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(2,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei $A'B'$, unde punctele A' şi B' sunt simetricele punctelor *A* şi *B* faţă de punctul *O*.
5p	**6.** Arătaţi că $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\sin x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos x = 0$, pentru orice număr real *x*.

<u>SUBIECTUL II (30 de puncte)</u>

	1. Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.
7p	**a)** Să se arate că $A^2 = 3A$.
8p	**b)** Să se calculeze A^{2016}.
	2. Se consideră mulţimea $M = \left\{a + b\sqrt{5} \,\middle|\, a^2 - 5b^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.
7p	**a)** Arătaţi că $9 + 4\sqrt{5} \in M$.
8p	**b)** Demonstraţi că *M* în raport cu înmulţirea numerelor reale este grup abelian.

	SUBIECTUL III (30 de puncte)
	1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$.
7p	**a)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.
8p	**b)** Arătaţi că $e\ln x\le 2\sqrt{x},$ oricare ar fi $x\in[1,\infty)$.
	2. Se consideră funcţiile $f,F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\frac{x^2}{2}+x-x\ln x,$ unde *F* este o primitivă a funcţiei *f*.
7p	**a)** Arătaţi că $f(x)=x-\ln x,\ x\in(0,\infty)$.
8p	**b)** Determinaţi o primitivă a funcţiei *g*, unde $g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)\cdot F(x)$.

Simulare, Bacalaureat, 7 decembrie 2016, Brăila
Proba E. c)
Matematică *M_ şt-nat*

Filiera teoretică, profil real, specializarea ştiinţe ale naturii.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi $2+12+22+...+92$.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficului funcţiei *f* cu axa *Ox*.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_4 x=6$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $A=\left\{0,\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},...,\sqrt{50}\right\}$ acesta să fie iraţional.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctul $A(3,2)$. Determinaţi ecuaţie dreptei *OA*.

5p **6.** Determinaţi aria triunghiului *ABC* ştiind că $AB=AC=8$ şi $A=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & x \\ x & x+1 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

7p **a)** Calculați determinantul matricei $A(i)$, unde $i^2=-1$.

8p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+2xy)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

7p **a)** Determinați elementul neutru al legii de compoziţie "$\circ$".

8p **b)** Determinaţi numărul real *x*, pentru care $x\circ x\circ x=-24$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3\ln x.$

7p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x},\ x\in(0,+\infty).$

8p **b)** Demonstraţi că $f(x)\ge 1,$ pentru orice $x\in(0,+\infty).$

2. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+e^x+1.$

7p **a)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei *f* este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

8p **b)** Calculaţi $\int x\cdot f(x)\,dx.$

Simulare, Bacalaureat, 7 decembrie 2016, Brăila
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătaţi că $\left(0,75+\frac{3}{4}\right):\frac{3}{2}=1.$
5p	**2.** Determinaţi numerele reale m ştiind că punctul $A(m,0)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-3m+7.$
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+2}=x.$
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{11,12,13,...,30\}$, acesta să fie pătrat perfect.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2),\ B(1,2)$ şi $C(-3,0)$. Calculaţi distanţa de la punctul B la mijlocul segmentului AC.
5p	**6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{1}{2}$, atunci calculaţi $\mathrm{tg}x$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
7p	**a)** Arătaţi că $A^2=5A-6I_2$.
8p	**b)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A-xI_2)=0.$
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x+y-xy.$
7p	**a)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie "$\circ$".
8p	**b)** Arătaţi că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z,$ oricare ar fi numerele reale x, y, z.

	SUBIECTUL III (30 de puncte)
	1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-2\ln x$.
7p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{x}, \ x\in(0,\infty)$.
8p	**b)** Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}$.
7p	**a)** Calculaţi $\int\left(f(x)-\frac{1}{x+4}\right)dx$.
8p	**b)** Determinați primitiva $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei *f*, pentru care $F(0)=\ln(12e)$.

Simulare, Bacalaureat, 7 decembrie 2016, Brăila
Proba E. c)
Matematică *M_ pedagogic*

Filiera vocaţională: profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**

Subiectul I (30 puncte)

5p	**1.** Determinaţi al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ….
5p	**2.** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axele *Ox* şi *Oy* a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x-40.$
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x+2^{x+3}=36.$
5p	**4.** După o ieftinire cu 20%, preţul unui produs devine 480 lei. Determinaţi preţul produsului, înainte de ieftinire.
5p	**5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(-2,0)$. Punctul *C* este simetricul lui *A* faţă de *B*. Determinaţi coordonatele punctului *C*.
5p	**6.** Se consideră triunghiul dreptunghic *ABC*, $m(\sphericalangle BAC)=90^\circ$, $m(\sphericalangle ABC)=45^\circ$ şi $BC=8\,\text{cm}$. Calculaţi aria triunghiului *ABC*.

Subiectul al II-lea (30 puncte)

	Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-4(x+y)+20$.
7p	**1.** Calculaţi $1\circ 2$.
8p	**2.** Verificaţi dacă $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziţie $"\circ"$.
8p	**3.** Demonstraţi că $x\circ y\geq 4$, oricare ar fi $x,y\in[4,+\infty)$.
7p	**4.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ(x+1)=4$.

Subiectul al III-lea (30 puncte)

	Se consideră mulţimea $M=\left\{A(x,y)\,\middle|\,A(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ şi matricele $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

7p	**1.** Calculaţi matricea $A(1,3)+B$.
8p	**2.** Determinaţi transpusa matricei $I_2+B+B^2+B^3+...+B^8$.
8p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A(2,1)\cdot X=B$.
7p	**4.** Dacă suma elementelor matricei $\left(A(x,y)-I_2\right)\cdot\left(A(x,y)+I_2\right)$ este egală cu 0, atunci determinaţi matricele $A(x,y)\in M$.

Simulare, Bacalaureat, 7 decembrie 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

SUBIECTUL I **30 puncte**

1.	$z=x+iy\Rightarrow(x+iy)(x-iy)-3(x+iy)=-1-3i$ $x^2+y^2-3x-3iy=-1-3i\Rightarrow y=1$ $x^2+y^2-3x=-1\Rightarrow x_1=1,x_2=2$ $z_1=1+i,z_2=2+i$	1p 1p 2p 1p
2.	$(g\circ f)(1)=3\Leftrightarrow g(1+2m)=3$ $1+2m-3m+1=-m+2\Leftrightarrow m=-1$	2p 3p
3.	$\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=1\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2$ $\frac{x+1}{x-1}=4\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ care verifică ecuaţia	2p 3p
4.	Utilizăm ***regula produsului***: Numărul cazurilor favorabile este egal cu $9\cdot9\cdot8=648$ Numărul total de cazuri este $9\cdot10\cdot10=900$ $P=\frac{648}{900}$	2p 1p 2p
5.	$A'(-1,-2)$ şi $B'(-2,-1)$ $x+y+3=0$	2p 3p
6.	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\sin x=-\cos x\cdot\sin x$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos x=\sin x\cdot\cos x$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos x=-\cos x\cdot\sin x+\sin x\cdot\cos x=0$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea **30 puncte**

1. a)	$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = 3A$	4p 3p
b)	Demonstrarea prin inducție $A^n = 3^{n-1}\cdot A,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru n=2016 obţinem $A^{2016} = 3^{2016-1}\cdot A = 3^{2015}\cdot A$	5p 3p
2. a)	Pentru $a=9$ şi $b=4 \Rightarrow a+b\sqrt{5} = 9+4\sqrt{5}$ $a^2-5b^2 = 81-80 = 1 \Rightarrow 9+4\sqrt{5} \in M$	3p 4p
b)	$x, y \in M \Rightarrow x = a+b\sqrt{5}, y = c+d\sqrt{5}, a^2-5b^2 = 1, c^2-5d^2 = 1$ $x\cdot y = \left(a+b\sqrt{5}\right)\left(c+d\sqrt{5}\right) = \left(a^2-5b^2\right)\left(c^2-5d^2\right) = 1$ Înmulţirea numerelor reale este asociativă Elementul neutru este 1, deoarece $1 = 1+0\sqrt{5}$ şi $1^2-5\cdot 0^2 = 1$ Dacă $x \in M \Rightarrow x = a+b\sqrt{5},\ a^2-5b^2 = 1 \Rightarrow x' = \dfrac{1}{a+b\sqrt{5}} = a-b\sqrt{5} \in M$ Înmulţirea numerelor reale este comutativă	1p 2p 1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **30 puncte**

1. a)

$f\,'(x) = \dfrac{\left(2-\ln x\right)\ln x}{x^2}$, $f\,'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = e^2,\ x_2 = 1$ — 2p

x	0		1		e^2		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	0

3p

f este strict descrescătoare pe $(0,1]$ și $[e^2,+\infty)$
 f este strict crescătoare pe $[1,e^2]$ — 2p

b)	Pentru $x \geq 1, x = e^2$ punct de maxim local, deci *f(x)* $\leq f\left(e^2\right)$, oricare $x \geq 1$,	2p 3p

	adică $\frac{\ln^2 x}{x} \le \frac{4}{e^2} \Leftrightarrow (e\ln x)^2 \le 4x \Leftrightarrow e\ln x \le 2\sqrt{x}$	3p
2. a)	F este derivabilă pe $(0,\infty)$ $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x - x\ln x\right)' = x + 1 - (\ln x + 1) = x - \ln x, x > 0$	2p 5p
b)	$\int g(x)dx = \int f(x)\cdot F(x)dx$ $\int f(x)\cdot F(x)dx = \int F'(x)\cdot F(x)dx$ $\int F'(x)\cdot F(x)dx = \frac{1}{2}F^2(x) + c$ și alegem, de exemplu, $c=0$	2p 3p 3p

Simulare, Bacalaureat, 7 decembrie 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

SUBIECTUL I **30 puncte**

1	Progresie aritmetică cu $a_1 = 2, r = 10$ $2 + (n-1)\cdot 10 = 92 \Leftrightarrow n = 10$ $S_{10} = \frac{(2+92)}{2}\cdot 10 = 470$	1p 2p 2p
2	$f(x) = 0$ $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow A(3,0)$	2p 3p
3	$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = 6 \Leftrightarrow \log_2 x = 4$ $x = 2^4 = 16$ care verifică ecuaţia	2p 3p
4	Mulţimea A conţine 8 numere iraţionale: $0, \sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{36}, \sqrt{49}$ Mulţimea A este formată din 51 de elemente $P = \frac{51-8}{51} = \frac{43}{51}$	2p 1p 2p

5	$O(0,0)$ şi $A(3,2)$ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = 0$	2p 3p
6	$A_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$ $= \dfrac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea **30 puncte**

1 a)	$\det A(i) = (i+1)^2 - i^2 =$ $= i^2 + 2i + 1 - i^2 = 2i + 1$	4 p 3 p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x+1 & x \\ x & x+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y+1 & y \\ y & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)(y+1)+xy & x(y+1)+y(x+1) \\ x(y+1)+y(x+1) & (x+1)(y+1)+xy \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} x+y+2xy+1 & x+y+2xy \\ x+y+2xy & x+y+2xy+1 \end{pmatrix} = A(x+y+2xy)$	4 p 4 p
2 a)	$\exists e \in \mathbb{R} : x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $xe - 3x - 3e + 12 = x \Leftrightarrow x(e-4) - 3(e-4) = 0 \Leftrightarrow (e-4)(x-3) = 0$ $(e-4)(x-3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 4 \in \mathbb{R}$	1 p 3 p 3 p
b)	$x \circ x = (x-3)^2 + 3 \Rightarrow x \circ x \circ x = (x-3)^3 + 3$ $(x-3)^3 + 3 = -24 \Leftrightarrow (x-3)^3 = -27 \Leftrightarrow x - 3 = -3 \Leftrightarrow x = 0$	4 p 4 p

SUBIECTUL al III-lea **30 puncte**

1 a)	$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=\frac{3x^3-3}{x}=$ $=\frac{3(x^3-1)}{x}=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$	3p 4p
b)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$ pe intervalul $(0,1]$ funcția f este descrescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$ funcția f este crescătoare $f(1)$ este valoarea minimă a funcţiei f pe $(0,+\infty)\Rightarrow f(x)\geq f(1)=1$	1p 2p 2p 3p
2 a)	Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ F crescătoare pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow F'(x)=f(x)\geq 0$, adevărat pentru orice $x\in\mathbb{R}$	3p 4p
b)	$\int x\cdot f(x)dx=\int\left(x^3+x+xe^x\right)dx=$ $=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+xe^x-e^x+c,c\in\mathbb{R}$	3p 5p

Simulare, Bacalaureat, 7 decembrie 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

SUBIECTUL I **30 puncte**

1	$0,75=\frac{3}{4}$ $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}:\frac{3}{2}=1$	2p 3p
2	$A(m,0)\in G_f\Rightarrow f(m)=0$ $2m-3m+7=0$ $m=7$	2p 1p 2p
3	$C.E.\begin{cases}x+2\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}$, $x+2=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0$ $x_1=-1,x_2=2$ Verificare $S=\{2\}$	2p 2p 1p
4	$Nr.\ cazuri\ posibile=20$	1p 2p

	$Nr.\ cazuri\ \ favorabile = 2$ $P = \frac{Nr.c.f.}{Nr.c.p.} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$	2p
5	Fie $M(x_M, y_M)$ mijlocul segmentului AC $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = -2$, $y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = -1 \Rightarrow M(-2,-1)$ $d(B,M) = BM = \sqrt{(1+2)^2 + (2+1)^2} =$ $= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	2p 2p 1p
6	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea **30 puncte**

1. a)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ $5A - 6I_2 = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$	3p 2p
b)	$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 4-x & -2 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$ $\det(A - xI_2) = 0 \Rightarrow (4-x)(1-x) + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ $x_1 = 2, x_2 = 3$	1p 2p 2p
2. a)	$(\exists!) e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} x \circ e = x + e - xe \\ e \circ x = e + x - ex \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \circ e = e \circ x \ \ (\forall) x \in \mathbb{R}$ din $x \circ e = x \Rightarrow e(1-x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 0 \in \mathbb{R}$	1p 1p 3p
b)	$(x \circ y) \circ z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy) \cdot z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$ $x \circ (y \circ z) = x + (y + z - yz) - x \cdot (y + z - yz) = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$ $\Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **30 puncte**

1. a)	$f'(x)=(x)'-(2\ln x)'=$ $=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x},(\forall)x\in(0,+\infty)$	2p 3p
b)	$f''(x)=\frac{(x-2)'\cdot x-(x-2)\cdot x'}{x^2}$ $=\frac{2}{x^2}$ $f''(x)>0,(\forall)x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ convexă pe $(0,+\infty)$	2p 1p 2p
2. a)	$\int\left(f(x)-\frac{1}{x+4}\right)dx=\int\frac{1}{x+3}dx=$ $\int(\ln(x+3))'dx=\ln(x+3)+C$	2p 3p
b)	$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{x+3}\right)dx+\int\left(\frac{1}{x+4}\right)dx\Rightarrow$ $F(x)=\ln(x+3)+\ln(x+4)+k$ Din $F(0)=\ln(12e)\Rightarrow(\ln 3+\ln 4)+k=\ln 12+\ln e$ $k=1\Rightarrow F(x)=\ln(x+3)+\ln(x+4)+1$	1p 1p 2p 1p

Simulare, Bacalaureat, 7 decembrie 2016
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

SUBIECTUL I **30 puncte**

1	progresie aritmetică cu $a_1=1$ și $r=6$ $a_{10}=a_1+9r$ $a_{10}=55$	2p 2p 1p
2	$G_f\cap Ox\Rightarrow y=0\Rightarrow A(-8,0),B(5,0)$ $G_f\cap Oy\Rightarrow x=0\Rightarrow C(0,-40)$	3p 2p
3	$2^x+8\cdot 2^x=36$ $x=2$	2p 3p
4	$x=$ prețul inițial al produsului	1p 2p

	$x-\frac{20}{100}x=480$ $x=600$ lei	2p
5	C simetricul lui *A* față de *B* rezultă că punctul *B* este mijlocul segmentului *AC* $x_B=\frac{x_A+x_C}{2}, y_B=\frac{y_A+y_C}{2}$ $C(-5,-2)$	1p 2p 2p
6	Triunghiul *ABC* este dreptunghic isoscel $AB=BC\sqrt{2}\Rightarrow AB=4\sqrt{2}$ $A_{\Delta ABC}=16$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea **30 puncte**

1	$1\circ 2=1\cdot 2-4(1+2)+20=$ $=2-12+20=10$	4p 3p
2	$e=5$ element neutru dacă $x\circ 5=5\circ x=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $x\circ 5=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $5\circ x=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ Finalizare	2p 3p 2p 1p
3	$x\circ y\geq 4\Leftrightarrow xy-4x-4y+16\geq 0$ $\Leftrightarrow(x-4)(y-4)\geq 0$ din ipoteză $\begin{cases}x\geq 4\\ y\geq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4\geq 0\\ y-4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow(x-4)(y-4)\geq 0$ de unde rezultă că $x\circ y\geq 4$, oricare ar fi $x,y\in[4,+\infty)$.	2p 2p 3p 1p
4	$x\circ(x+1)=4\Leftrightarrow x(x+1)-4(2x+1)+16=0$ $x^2-7x+12=0$ $x\in\{3,4\}$	2p 3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **30 puncte**

1	$A(1,3)=\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}$ $A(1,3)+B=\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-1&2\end{pmatrix}$	3p 5p

2	$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, $B^3 = -B$, $B^4 = I_2$ $I_2 + B + B^2 + ... + B^8 = I_2 + \left(B + B^2 + B^3 + B^4\right) + B^4\left(B + B^2 + B^3 + B^4\right) =$ $= I_2 + O_2 + B^4 \cdot O_2 = I_2$ ${I_2}^t = I_2$	2p 3p 2p 1p
3	fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$; $A(2,1) \cdot X = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix}$ $A(2,1) \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = -1 \\ 2b + d = -1 \\ -a + 2c = 2 \\ -b + 2d = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{3}{5} \\ c = \frac{3}{5} \\ d = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$	3p 1p 4p
4	$\left(A(x,y) - I_2\right) \cdot \left(A(x,y) + I_2\right) = A^2(x,y) - I_2 = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 1 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 - 1 \end{pmatrix}$ Avem $x^2 - y^2 \doteq 1$, unde $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x - y)(x + y) = 1$ Obținem sistemele $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ În concluzie, $A(x,y) \in \{A(1,0); A(-1,0)\}$	2p 2p 2p 1p

Admitere în clasa a V-a în anul şcolar 2016-2017, Brăila
Subiecte – model

1. Determinaţi pentru ce valoare a lui a următoarea egalitate este adevărată:

$$\left[\left(a+350:5\right)\times 4+6\right]\times 2=612.$$

(30 puncte)

2. Suma a trei numere este 950. Dacă împărțim primul număr la al doilea, obținem câtul 4 și restul 8. Dacă împărțim al treilea număr la al doilea obținem câtul 3 și restul 6. Determinaţi cele trei numere.

(20 puncte)

3. Într-un cabinet de informatică, dacă se aşază câte doi elevi la un calculator, atunci la ultimul calculator rămâne un singur elev. Dacă se aşază câte trei elevi la un calculator, atunci rămân patru calculatoare libere. Determinaţi numărul calculatoarelor şi numărul elevilor din cabinet.

(20 puncte)

4. Suma a zece numere naturale diferite de zero este egală cu 54. Arătaţi că cel puţin două dintre aceste numere sunt egale.

(20 puncte)

Notă:

- Timpul de lucru este de 45 minute.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin adunarea punctajelor obţinute la fiecare din cele 4 subiecte, la care se adaugă cele 10 puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Subiectele au fost propuse de:
Prof. Daniela Covaci, Colegiul Naţional „Gh. M. Murgoci”
Prof. Nazeli Boicescu, Colegiul Naţional „Gh. M. Murgoci”
Prof. Simona Slobodeanu, Colegiul Naţional “N. Bălcescu”
Prof. Adela Dimov, Colegiul Naţional “N. Bălcescu
Prof. Narcis Turcu, Liceul Teoretic “N. Iorga”

Admitere în clasa a V-a pentru anul școlar 2016-2017
Matematică – subiecte, 11 iunie 2016

1. (30 puncte) Determinați pentru ce valoare a lui x următoarea egalitate este adevărată: $111\times 9-\left[408:\left(x-5\right)+260\right]:3\times 9+32=239$.

2. (20 puncte) Determinați trei numere naturale știind că: dacă împărțim primul număr la al doilea, obținem câtul 4 și restul 2; câtul dintre al treilea număr și primul număr este 2 și restul 0, iar diferența dintre al treilea număr și al doilea număr este 760.

3. (20 puncte) Mihai, jucându-se cu pietricele și vrând să pună în fiecare gropiță același număr de pietricele, face umătorul calcul: *dacă pun câte 12 pietricele în fiecare gropiță, îmi rămân 10 pietricele, iar dacă aș vrea să pun câte 15 pietricele în fiecare gropiță, mi-ar mai trebui 5 pietricele.* Determinați numărul pietricelelor pe care le are Mihai.

4. (20 puncte) Harry are înălțimea de 160 cm și bagheta sa magică măsoară 2 cm. Harry face câte o magie în fiecare zi și câte o magie în fiecare noapte. Dacă face o magie pe timpul zilei, atunci lungimea baghetei sale se dublează, dacă face o magie pe timpul nopții atunci lungimea baghetei crește cu 1 cm. Care este cel mai mic număr de magii pe care trebuie să le facă Harry, astfel încât bagheta sa să măsoare mai mult decât înălțimea sa.

Notă:

- Timpul de lucru este de 45 de minute.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin adunarea punctajelor obținute la fiecare în cele 4 subiecte, la care se acordă cele 10 puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

CONCURSUL REZOLVITORILOR REVISTEI

Probleme propuse pentru clasa I

P1 : Mă puteți determina?
Sunt cel mai mare număr natural din care, scăzând pe 4, obținem un număr mai mic decât 4.

Daniela Drăghici – Școala Gimnazială „Mihai Eminescu" Brăila

P2: Cămila Milla străbate deșertul alături de stăpânul ei, Aladin. Ca să poată supraviețui călătoriei, la plecare bea foarte multă apă, pe care o păstrează în cele două cocoașe. La jumătatea drumului, consumase deja 6 litri de apă din rezervă. La finalul drumului, cămila Milla mai avea la dispoziție dublul numărului de litri de apă consumați până la jumătatea drumului.

Câți litri de apă a băut cămila Milla înainte de plecare? I-ar ajunge rezerva de apă și pentru drumul de întoarcere?

Cornea Steluța Mirela - *Școala Gimnazială „Mihai Eminescu" Brăila*

P3: Jack Sparrow și cei patru pirați din Caraibe au găsit pe Insula Comorii un cufăr cu dinari de aur. Se hotărăsc, desigur, să-i împartă. Dacă primește fiecare câte 10 dinari, rămân 27 de dinari neîmpărțiți. Se dovedește însă că unul dintre pirați ascunsese în pălărie o parte din bani. După ce hoțul pune banii înapoi, Jack face o nouă împărțeală, de data aceasta fiecare primind câte 20 de dinari.

Câți dinari a furat piratul? Câti dinari au fost la început în cufăr?

Cornea Steluța Mirela - *Școala Gimnazială „Mihai Eminescu" Brăila*

P4: **Buletin meteorologic**

-În ultimele două săptămâni, spuse meteorologul de serviciu, am avut două zile înnorate, dar fără ploaie, 3 zile ploioase de-a dreptul, restul zilelor fiind însorite.

Dacă la diferența numerelor 56 și 43, adăugăm numărul zilelor însorite, vom afla, în grade Celsius, ce valori termice se vor înregistra în următoarele zile!

a) Câte zile însorite au fost în ultimele două săptămâni?

b) Câte grade Celsius se vor înregistra în următoarele zile?

Tulumis Violeta - *Școala Gimnazială,,Mihu Dragomir" Brăila*

Probleme propuse pentru clasa a II-a

P:5 Am pregătit pentru „Ziua școlii” 1000 de fursecuri cu cacao, cu vanilie sau cu migdale. Cu cacao și vanilie sunt 540. Câte sunt din fiecare fel, dacă cele cu vanilie sunt cu 175 mai puține decât cele cu migdale?

Coman Didina - Școala Gimnazială Mihai Eminescu Brăila

P:6 Dintr-o podgorie s-au cules 57 kg struguri albi şi cu 33 kg mai puţin struguri negri. Întreaga cantitate s-a pus în lădiţe de câte 9 kg. Câte lădiţe s-au folosit?

Beizadea Anişoara, Tobă Daniela - Şcoala Gimnazială Cireşu, jud. Brăila

P:7 Cele 3 găini din gospodăria Mariei au scos câte 12 puișori. Gospodina constată că aceștia sunt cât jumătate din numărul rațelor și cu 26 mai puțini decât gâștele. Câte păsări are Maria?

Coman Didina - Școala Gimnazială Mihai Eminescu Brăila

P:8 Mihai are 7 ani, adică jumătate din vârsta Andrei, iar George cât vârsta Andrei micșorată cu cel mai mare număr de o cifră.

a) Scrie numele copiilor după vârsta lor în ordine crescătoare.

b) Câți ani va avea fiecare din cei trei copii peste 5 ani?

Coman Didina - Școala Gimnazială Mihai Eminescu Brăila

Probleme propuse pentru clasa a III-a

P:9 Mihai are 56 de timbre cu fluturi și 9 timbre cu pești. Un timbru cu pești valorează cât 8 timbre cu fluturi. Băiatul schimbă toate timbrele cu fluturi pe timbre cu pești. Câte timbre are Mihai acum?

Toma Tilica – Școala Gimnazială Dudești, jud. Brăila

P:10 Într-o tabără s-au înscris 32 de fete și de 3 ori mai mulți băieți. Dacă 53 de copii au plecat cu autocarul, iar restul au plecat cu 3 microbuze, află câte locuri sunt într-un microbuz, știind că fiecare a ocupat un loc și nu au rămas locuri neocupate.

Toma Tilica – Școala Gimnazială Dudești, jud. Brăila

P:11 Pe terenul de joacă din curtea școlii sunt mai mulți copii. Ei observă că se pot grupa câte doi, câte trei și câte cinci pentru a organiza diferite jocuri și nu rămân copii în afara jocului.

Câți copii sunt pe terenul de joacă, știind că reprezintă cel mai mic număr care îndeplinește condițiile de mai sus?

Toma Tilica – Școala Gimnazială Dudești, jud. Brăila

P:12 Andrei, Mircea și Raluca au împreună 63 de cartonașe cu actori. Andrei are de 3 ori mai multe cartonașe decât Mircea. Dacă Raluca i-ar da lui Mircea 4 cartonașe, atunci cei doi ar avea același număr de cartonașe. Află câte cartonașe are fiecare băiat.

Toma Tilica – Școala Gimnazială Dudești, jud. Brăila

Probleme propuse pentru clasa a IV-a

P:13 Oltul este unul din cele mai importante râuri din România. El izvorăște din Munții Giurgeu (Carpații Orientali) și străbate șapte județe, având o lungime de 615 km. Rezolvă exercițiul de mai jos și vei afla câte lacuri de acumulare există pe râul Olt.

$$[55 \times 5 - (199 - 99 \times 2 + 20 \times 5) + 220 : 10] : 4 - 19$$

Daniela Drăghici – Școala Gimnazială „Mihai Eminescu” Brăila

P:14 La grupul vocal participă băieți și fete. Dacă triplul numărului de fete este cu 1 mai mare decât dublul numărului de băieți, iar triplul numărului de băieți este cu 1 mai mare decât de patru ori numărul de fete, află câte fete și câți băieți participă la grupul vocal.

Ecaterina Bonciu - Școala Gimnazială „Ion Creangă” Brăila

P:15 Tata plătește la casă cumpărăturile, folosind bancnote de 1 leu, 5 lei și 10 lei, în total 18 bancnote. Știind că numărul bancnotelor de 1 leu este cât suma dintre numărul bancnotelor de 5 lei și dublul bancnotelor de 10 lei, iar suma dintre numărul bancnotelor de 1 leu și cel al bancnotelor de 5 lei este de 8 ori numărul bancnotelor de 10 lei, determină: ***a)*** numărul bancnotelor de fiecare fel; ***b)*** valoarea totală a cumpărăturilor, dacă nu a primit rest.

Ecaterina Bonciu - Școala Gimnazială „Ion Creangă” Brăila

P:16 La un concurs de matematică s-au susținut 3 probe; după prima probă au fost eliminați 1/3 din participanți și un elev a renunțat; după a doua au fost eliminați 1/5 din cei rămași şi alți 4 au renunțat, iar după ultima probă au fost eliminați 1/4 din cei rămași și încă 8. Știind că au fost câștigători 40 de elevi, câți s-au înscris inițial la concurs?

Ecaterina Bonciu - Școala Gimnazială „Ion Creangă” Brăila

Probleme propuse pentru clasa a V-a

G:1. Determinaţi toate perechile de numere naturale $\left(\overline{abx},\overline{yab}\right)$ ştiind că $\overline{abx}$ este pătrat perfect, iar $\overline{yab}$ este cub perfect.

Daniela Stănică, Brăila

G:2. Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ şi numerele naturale *x*, *y* ştiind că $8\cdot\left(\overline{abc}+5^x\right)=2017-8^y$.

Daniela Cerchez, Brăila

G:3. Determinaţi toate numerele naturale nenule care împărţite la 13 dau câtul *c* şi restul *r*, iar împărţite la 31 dau câtul *r* şi restul *c*.

Ionuţ Mazalu, Brăila

G:4. Arătaţi că nu există numere naturale care împărţite la 9 dau restul 3 şi împărţite la 12 dau restul 5.

Anda Crăcan, Brăila

Probleme propuse pentru clasa a VI-a

G:5. Se consideră numărul $P_k=2^k\cdot\left(2^{k+1}-1\right)$, unde *k* este număr natural.

a) Determinaţi numărul natural *k* ştiind că $P_k=1+2+3+...+63$.

b) Arătaţi că există un număr natural *k* astfel încât:

$$P_k=2^{1008}+2^{1009}+2^{1010}+...+2^{2016}.$$

Ciprian Dobraniş, Brăila

G:6. Determinaţi perechile de numere naturale (a,b), nenule pentru care $\dfrac{a+1}{b}$ şi $\dfrac{b+3}{a}$ sunt simultan numere naturale.

Daniela Cerchez, Brăila

G:7. Calculaţi c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c al numerelor naturale *x* şi *y*, unde:
$x=3^{n+3}+3^{n+2}+3^n-37$ şi $y=3^{n+4}+3^{n+3}+3^{n+1}+111,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Adelina Ion, Brăila

G:8. Fie A, B, C, D, E puncte coliniare, în această ordine, iar M și N mijloacele segmentelor $[BC]$ și $[DE]$. Calculaţi lungimile segmentelor AB, BC, CD și DE știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

$$2 \cdot AB = DE,\ BC = CE,\ AM = 2 \cdot CD \text{ şi } MN = 36\,\text{cm}.$$

Mihaela Baltă, Brăila

Probleme propuse pentru clasa a VII-a

G:9. Se consideră triunghiul *ABC* în care *AB* = 3 cm, *AC* = 5 cm şi $m(\sphericalangle BAC) = 120^\circ$. Calculaţi lungimea bisectoarei (*BD*), $D \in (AC)$ a triunghiului *ABC*.

Pasici Rudi, Brăila

G:10. a) Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a < b$, atunci $\dfrac{a}{a+1} < \dfrac{b}{b+1}$.

b) Determinaţi numerele naturale distincte $a, b, c \in \mathbb{N}^*, a < b < c$ astfel încât

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \in \mathbb{N}.$$

Irinel Pancu, Brăila

G:11. Determinaţi suma tuturor numerelor de forma $\overline{abc}$, unde:

$$\overline{abc} = \left[n + 3n + ... + (2k-1)n\right]^2,\ n \in \mathbb{N},\ k \text{ număr prim.}$$

Antohe Florin, Galaţi

G:12. Fie dreptunghiul *ABCD* şi punctele *M* pe (*AB*), *P*, *Q* pe (*AD*) şi *R*, *T* pe (*BC*). Demonstraţi că centrele de greutate ale triunghiurilor *MPR*, *MPT*, *MQR* şi *MQT* sunt coliniare.

Daniela şi Nicolae Stănică, Brăila

Probleme propuse pentru clasa a VIII-a

G:13. Determinaţi numărul natural *n* ştiind că:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 28.$$

Daniela Tilincă, Brăila

G:14. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura de $5\,\text{cm}$ și punctele $M \in [DD'], N \in [C'C], P \in [AB]$ astfel încât $DM = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$, $CN = \dfrac{6\sqrt{2}}{23}\,\text{cm}$ și $AP = 2\,\text{cm}$. Calculați distanța de la punctul D la planul (MNP).

Ciprian Ştefănescu, Brăila

G:15. Dacă $a^2 + b^2 - 2\sqrt{3}a - 4\sqrt{2}b + 11 \le 0, a, b \in \mathbb{R},$ atunci arătaţi că numărul $c = a \cdot \left|2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right| + \dfrac{b}{\left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right|}$ este natural.

Mirela Tarţa, Movila Miresii, Brăila

G:16. Fie numerele reale *a*,*b*,*c*,*d* care verifică relația:

$$2a - \frac{a^2 + b^2}{10} - b = 3a + \frac{c^2 + d^2}{10} - c - d + 10$$

Arătaţi că $|a| = |b| = |c| = |d|$.

Ana Maria Popovici, Brăila

Probleme propuse pentru clasa a IX-a

L:1. Dacă într-o progresie aritmetică de numere naturale există un pătrat perfect, atunci arătaţi că progresia conţine o infinitate de pătrate perfecte.

Murea Roxandra, Brăila

L:2. Demonstraţi că $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{ab(a+b)}} \le \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2ab}$, pentru orice $a, b \ge 0.$

Costel Cerchez, Brăila

L:3. Dacă *a*, *b*, *c* sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci demonstraţi că:

$$9a^2 + 9b^2 + 17c^2 - 14ac - 14bc - 6ab > 0.$$

Nicolae Stănică, Brăila

L:4. Să se arate că $(x-1)\sqrt{x^2 + x} + x\sqrt{x^2 - 1} + (x+1)\sqrt{x^2 - x} < 3x^2 - 1,$ pentru orice număr real *x*, $x \ge 1.$

Valentin Damian, Brăila

Probleme propuse pentru clasa a X-a

L:5. Fie $x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0$.
Dacă $\log_2 x + \log_2 y = 1$ și $\log_7(4x^2 + 36x\mathrm{y} + 36\mathrm{y}^2) = 2$, atunci arătaţi că $\log_5(x + 2\mathrm{y}) = 1$.

Valeriu Tobă, Brăila

L:6. Se consideră $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ soluții ale ecuației $x^4 - ax^3 + ax - 1 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} + x_3^{\ 3} + x_4^{\ 3} = a\left(3 - a^2\right)$, atunci $|x_1| = |x_2| = |x_3| = |x_4| = 1$.

Valentin Damian, Brăila

L:7. Fie $ABCD$ trapez cu $AB \,||\, CD$. În semiplanul determinat de *AB* şi punctul *C* şi în semiplanul determinat de *CD* şi punctul *A* construim triunghiurile echilaterale *SAB*, respectiv *RDC*. Demonstraţi că dreptele *RS*, *AC* si *BD* sunt concurente.

Nicolae Stănică, Brăila

L:8. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $x^{x-1} - 1 = \left(x - 1\right)^3$.

Nicolae Stănică, Brăila

Probleme propuse pentru clasa a XI-a

L:9. Calculaţi limita şirului $a_n = \dfrac{\left[n\sqrt{2017}\right]}{n^2}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Ana Maria Popovici, Brăila

L:10. Fie $I \subseteq R$ şi $f: I \to I$. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ prin relaţia $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \geq 0$, $a_0 \in I$. Să se arate că:

a) Dacă f este crescătoare, atunci $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton;

b) Dacă f este descrescătoare, atunci şirurile $(a_{2n})_{n\geq 0}$ şi $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ sunt monotone şi au monotonii diferite.

Iconaru Daniela, Brăila

L:11. Fie matricea $A \in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ cu $Tr\left(A\right) = 1$ şi $\det\left(A\right) = 2$. Demonstraţi că:

$$\det\left(A - pI_2\right) + \det\left(A^2 - qI_2\right) + \det\left(A^3 - tI_2\right) \geq \frac{21}{4},$$ pentru orice $p, q, t \in \mathbb{R}$.

Nicolae Stănică, Brăila

L:12. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ și fie $a,b,c\in(0,\infty)$ abscisele a trei puncte distincte de pe graficul funcției f. Arătați că aria triunghiului determinat de cele trei puncte este egală cu $\left|\ln\sqrt{a^{\frac{c-b}{a}}\cdot b^{\frac{a-c}{b}}\cdot a^{\frac{b-a}{c}}}\right|$.

Valentin Damian, Brăila

Probleme propuse pentru clasa a XII-a

L:13. Calculați $\displaystyle\int\frac{e^{x^2+x}\left(4x^2-8x-3\right)-e^{2x^2+2x}\left(4x^2+4x+1\right)-9}{(2x+1)e^{x^2+x}+3}dx$.

Daniela Covaci, Brăila

L:14. Fie *G* un grup finit de ordin *n*. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Ecuaţia $x^2=a$ are soluţii în *G*, pentru orice $a\in G$.

b) *n* este număr impar.

Daniela Iconaru, Brăila

L:15. Se consideră mulțimea $A=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\,f \text{ admite primitive pe } \mathbb{R}\right\}$. Determinați funcțiile $f\in A$ cu proprietatea $2F(x)+f(x)=|x|$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde F este o primitivă a funcției f pe mulțimea numerelor reale.

Mădălina Teodorescu, Brăila

L:16. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2017}, g(x)=xe^x$.

Calculaţi $\displaystyle\int\frac{f'(x)g'(x)}{g(x)}dx+\int\frac{f(x)g''(x)}{g(x)}dx-\int\frac{f(x)\left[g'(x)\right]^2}{g^2(x)}dx$.

Valentin Damian, Brăila

INFORMAŢII PENTRU AUTORII DE ARTICOLE, NOTE MATEMATICE ŞI PROBLEME

Materialele transmise redacţiei trebuie să fie originale şi să nu fi fost expediate către alte publicaţii de specialitate. Ele se vor transmite pe adresa redacţiei rmatebr@gmail.com. Fiecare autor va fi informat despre publicarea materialelor în următorul număr al revistei.

INFORMAŢII DESPRE CONCURSUL REZOLVITORILOR REVISTEI

Soluţiile problemelor propuse pentru Concursul Revistei de matematică din Brăila (minim 4 probleme) vor fi transmise pe adresa: Redacţia Revistei de Matematică din Brăila, Str. Şcolilor, nr. 81, bl. PP, sc. 4, ap. 6, Brăila însoţite de talonul decupabil din revistă. Fiecare elev poate trimite rezolvări ale problemelor din clasa pe care o urmează şi clasa precedentă celei pe care o urmează.

Soluţiile problemelor se vor scrie pe foi separate şi vor conţine obligatoriu enunţul problemei-nume şi prenume autor problemă-soluţie. La expeditor este obligatoriu să treceţi Numele şi prenumele, localitatea, şcoala, clasa şi numărul de telefon.

Se vor acorda premii (diplome, medalii, cărţi, etc) pentru fiecare clasă. Premiile se vor acorda la finalul anului calendaristic, în urma centralizării punctajelor obţinute pentru fiecare problemă (fiecare problemă valorează 7 puncte). Clasamentele vor fi publicate în ultimul număr, din anul calendaristic, înaintea premierii elevilor, pe clase.

Soluţiile problemelor din nr. 1 al revistei se pot transmite pe adresa redacţiei până cel târziu pe 23 decembrie 2017.

Talon de participare la
“Concursul Rezolvitorilor Revistei de matematică din Brăila”

Nume şi prenume elev	
Unitatea şcolară	
Clasa	
Profesor îndrumător	
Adresă de e-mail elev	
Probleme rezolvate	
Semnătura profesorului îndrumător	

"Matematica este poarta și cheia în știință"

Roger Bacon

Istoria matematicii

O cunoscută carte de matematică: "ELEMENTELE" scrisă de Euclid

Prof. Ana-Maria Popovici

Şcoala Gimnazială Scorţaru Nou, Brăila

1. Cine a fost *Euclid*?

Euclid din Alexandria(325î.Hr – 265 î.Hr.), a cărui origine se presupune că ar fi orașul Damasc, a fost un matematician grec aparținând următoarei generații de după Aristotel care a trăit spre sfârșitul epocii eleniste în timpul regelui Ptolemeu I care ajunsese să domnească în Egipt după moartea lui Alexandru cel Mare.

Euclid activează, la fel ca mulți alți mari învățați ai vremii sale, în metropola egipteană Alexandria unde redactează cea mai importantă operă a sa, care este concepută ca un rezumat între cunoștințele matematice ale vremii și descoperirile proprii. Euclid a creat propria școală de matematică.

2. Ce a scris *Euclid*?

Cartea de matematică având cea mai mare influență din toate timpurile, *"Stihia"*, în traducere românească "*Elementele*", cuprinde 13 volume(capitole) fiind tradusă în peste 300 de limbi. În acestă carte, pornind de la teoremele lui Pitagora și ale lui Eudoxus, Euclid pune bazele aritmeticii și ale geometriei plane și spațiale.

Primele șase părți conțin teoremele geometriei plane, următoarele trei abordând teoria numerelor care include studiile proprii asupra numerelor prime și perfecte(un număr perfect este egal cu suma divizorilor săi excluzându-se pe el insuși din șirul divizorilor).

Partea a zecea continuă studiul început de Eudoxus asupra numerelor iraționale, iar ultimele trei capitole conțin elemente de geometrie a corpurilor solide.

Cartea începe cu următoarele definiții de bază:

- Un punct este ceva care nu are părți
- O linie este o lungime fără lățime
- Capetele unei linii sunt puncte
- O dreaptă este o linie care trece în egală măsură prin două puncte

Rezultă patru postulate, printre care teoria conform căreia, între două puncte oarecare se poate trasa o singură dreaptă. Postulatul cinci, așa numita axiomă a paralelelor, enunță că din mai multe drepte date, numai o singură dreaptă poate trece paralel cu alta printr-un punct fix. Enunțul postulatului cinci suna diferit pentru că Euclid nu a folosit termenul de *paralelism*, ci de *prelungire infinită*, adică două drepte pot fi prelungite la infinit fără ca acestea să se întâlnească vreodată. Axiomele euclidiene presupun un nou raport cu legile matematice. Axiomele nu pot fi demonstrate, ele pot fi doar verificate prin metode empirice.

În teoria numerelor, Euclid susține că orice număr natural mai mare decât unu fie este număr prim, fie se poate descompune în produs de numere prime. Algoritmul Euclidian binecunoscut din cartea a șaptea a *Elementelor* descrie procedeul de determinare a celui mai mare divizor comun.

Euclid se mai ocupa pe lângă matematică, de astronomie și de optică.

Elementele reprezintă cartea după care s-a învățat geometrie secole de-a rândul. Geometria euclidiană a fost detronată de geometria neeuclidiană (geometria spațiilor curbe: hiperbolice sau parabolice) abia după 2000 de ani, în secolul al XIX-lea; Einstein îi expune limitele prin teoria relativității.

Euclid a rămas în concepția omenirii drept *părintele geometriei.*

Bibliografie:

[1] *** *Cronica ilustrată a omenirii vol 3– Roma și elenismul 323-27 î.Hr.*

[2] *www.matepedia.ro*

[3] *www.scientia.ro*

[4] *cultural.bzi.ro*

CUPRINS

Articole şi note matematice ………………………………………………………….. pag. 5
Olimpiade şi concursuri …………………………………………………………….. pag. 27
Consideraţii metodice ………………………………………………………………... pag. 33
Simularea examenelor naţionale ……………………………………………… pag. 43
Admiterea în clasa a V-a ……………………………………………………………. pag. 65
Concursul rezolvitorilor revistei ……………………………………………….. pag. 67
Istoria matematicii ……………………………………………………………………. pag. 77