INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a IX a

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + \frac{3}{4}$, oricare ar fi $n \geq 1, a_1 = \frac{2013}{2014}$.

a) Determinați formula termenului general $a_n, n \geq 1$.

b) Demonstrați că $\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)\left(a_2 - \frac{1}{2}\right)\ldots\left(a_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{503}{1007}\right)^n$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

1)

a) $a_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$a_{n+1} - \frac{1}{2} = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right)^{2^2} = \dots = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^{2^n} =$

$= \left(\frac{2013}{2014} - \frac{\cancel{1}^{1007}}{\cancel{2}}\right)^{2^n} = \left(\frac{1006}{2014}\right)^{2^n} = \left(\frac{503}{1007}\right)^{2^n}$

$a_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{503}{1007}\right)^{2^{n-1}}$

b) $\left(a_1 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(a_n - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{503}{1007}\right)^{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}} =$

$= \left(\frac{503}{1007}\right)^{2^n - 1}$. Ar că $2^n - 1 \geq n \quad \forall n \geq 1$

$P(1): 1 \geq 1$

Pp $P(n)$ ad $P(n+1)$ A

$P(n+1): 2^{n+1} \geq n+2$

$\underbrace{2^n}_{\geq n+1} \cdot 2 \geq n+2$ ar că $2n+2 \geq n+2$ A

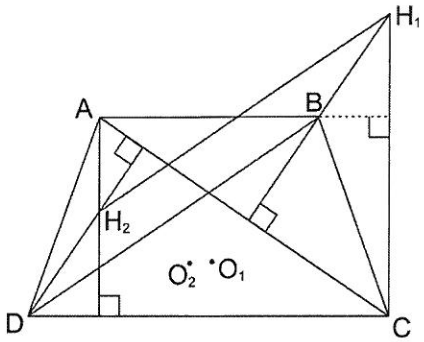
$\Rightarrow \left(\frac{503}{1007}\right)^{2^n - 1} \leq \left(\frac{503}{1007}\right)^n, \quad \forall n \geq 1$

2. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi punctele H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor ABC şi respectiv ADC.

Demonstraţi că $H_1H_2 \parallel BD$ dacă şi numai dacă $AD = BC$.

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluţie. Notăm cu O_1 centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi cu O_2 centrul cercului circumscris triunghiului ADC.



Atunci

$$\overrightarrow{O_1H_1} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C}$$

şi

$$\overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_2D} + \overrightarrow{O_2C}.$$

Prin scăderea membru cu membru a egalităţilor de mai sus, obţinem

$$\overrightarrow{O_1H_1} - \overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{O_1A} - \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_2D} + \overrightarrow{O_1C} - \overrightarrow{O_2C},$$

care conduce la

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{H_1H_2} + 2\overrightarrow{O_1O_2}. \quad (1)$$

Din $BH_1 \perp AC$ şi $DH_2 \perp AC$ avem $BH_1 \parallel DH_2$ şi, ţinând cont de (1) şi de faptul că un trapez este inscriptibil dacă şi numai dacă este isoscel, avem

$$H_1H_2 \parallel BD \Leftrightarrow H_1H_2DB \text{ este paralelogram} \Leftrightarrow \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{BD} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow O_1 = O_2 \Leftrightarrow ABCD \text{ este inscriptibil} \Leftrightarrow AD = BC.$$

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia pozitivă şi $a_1 \geq \frac{1}{2}$ şi suma $S_n = \sqrt{1+\frac{r}{a_1 \cdot a_2}} + \sqrt{1+\frac{r}{a_2 \cdot a_3}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{r}{a_n \cdot a_{n+1}}}$, $n \in N$, n ≥ 2. Calculaţi partea întreagă a lui S_{2014}.

***

$\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$ pt. x ≥ -1

$$S_n \leq n+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a_1 \cdot a_2}+\frac{r}{a_2 \cdot a_3}+\ldots+\frac{r}{a_n \cdot a_{n+1}}\right) = n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) < n+\frac{1}{2a_1} \leq n+1$$

n $\leq S_n \leq n+1$

4. Determinaţi x, y numere întregi care verifică relaţia: $xy = 3\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

4. $x \cdot y = 3\sqrt{x^2+y^2} - 3 \Rightarrow x^2+y^2 = p.p. \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = t \in \mathbb{N}$

$xy = 3t - 3$

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = t^2 + 6t - 6$$

$+9-9$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - (t+3)^2 = -15$$

$$(x+y-t-3)(x+y+t+3) = -15$$

$$x+y-t-3 < x+y+t+3$$

I
$x+y-t-3 = -1$
$x+y+t+3 = 15$

$x+y = 7 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow x^2+y^2 = 25 \Rightarrow$ $x=3$, $y=4$

$xy = 12 \Rightarrow \alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0$; $\Delta = 1$ $\quad$ $x=4$, $y=3$

$\alpha_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$ $\quad$ 4, 3

II
$x+y-t-3 = -3$
$x+y+t+3 = 5$

$x+y = 1$ $\quad$ $xy = 0$ $\Rightarrow$ $x=0$, $y=1$ $\quad$ $x=1$, $y=0$

$t = 1$

III
$x+y-t-3 = -5$
$x+y+t+3 = 3$

$x+y = -1$ $\quad$ $xy = 0$ $\quad$ $x=0$, $y=-1$ $\quad$ $x=$ y

$t = 1$

IV
$x+y-t-3 = -15$
$x+y+t+3 = 1$

$x+y = -7 \Rightarrow t = 5$; $xy = 12$ $\quad$ $x=$ $y=-$

α^2 $\quad$ $x=4$, $y=-3$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a X a

1. Comparaţi numerele

$$a=\left[\log_2\left(\sqrt{5}+1\right)\right]^3 \text{ şi } b=1+\log_2\left(\sqrt{5}+2\right).$$

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluţie. Pentru orice $x\geq 0$ are loc inegalitatea $x^3\geq 3x-2$.

Într-adevăr, folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, avem $x^3+2=x^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{x^3\cdot 1\cdot 1}=3x \Rightarrow x^3\geq 3x-2$.

Egalitatea are loc $\Leftrightarrow x=1$.

Folosind inegalitatea demonstrată şi faptul că $\log_2\left(\sqrt{5}+1\right)>1$, avem

$$a=\left[\log_2\left(\sqrt{5}+1\right)\right]^3>3\log_2\left(\sqrt{5}+1\right)-2=\log_2\left(\sqrt{5}+1\right)^3-2=$$

$$=\log_2\left(8\sqrt{5}+16\right)-\log_2 4=\log_2\frac{8\sqrt{5}+16}{4}=\log_2\left[2\left(\sqrt{5}+2\right)\right]=1+\log_2\left(\sqrt{5}+2\right)=b.$$

În concluzie, $a>b$.

2.Rezolvaţi ecuaţia $\log_a\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_b x$, unde $a>1, b>1, a^2=b+1$.

Soluție. Notăm $\log_a\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_b x=t$. Avem $1+\sqrt{x}=a^t$ și $x=b^t$

$\Rightarrow 1+\sqrt{b^t}=a^t \Leftrightarrow 1+b^{t/2}=\left(a^2\right)^{t/2}$. Dacă notăm $t/2=u$, ecuația se mai scrie $1+b^u=\left(a^2\right)^u$,

adică $1+b^u=(1+b)^u \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+b}\right)^u+\left(\frac{b}{1+b}\right)^u=1$.

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(u)=\left(\frac{1}{1+b}\right)^u+\left(\frac{b}{1+b}\right)^u$ este descrescătoare și cum $f(u)=f(1)=1$, rezultă $u=1\Rightarrow t=2\Rightarrow x=b^2$, soluție unică.

3.Arătați că dacă a, b, c, $\in(0,1)$ atunci

$$\log_{\frac{a+b}{2}} c+\log_{\frac{b+c}{2}} a+\log_{\frac{c+a}{2}} b\geq 3$$

R.M.T. - 2012

Soluție:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}, c\in(0,1)\Rightarrow 0\prec\log_c\frac{a+b}{2}\leq\log_c\sqrt{a\cdot b}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{1/2} a+\log_{1/2} b}{\log_{1/2} c}$$

În mod analog pentru celelalte $\Rightarrow$

$$\log_{\frac{a+b}{2}} c+\log_{\frac{b+c}{2}} a+\log_{\frac{c+a}{2}} b=\frac{1}{\log_c\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{\log_a\frac{b+c}{2}}+\frac{1}{\log_b\frac{c+a}{2}}\geq\frac{2\log_{\frac{1}{2}} c}{\log_{\frac{1}{2}} a+\log_{\frac{1}{2}} b}+\frac{2\log_{\frac{1}{2}} a}{\log_{\frac{1}{2}} b+\log_{\frac{1}{2}} c}+$$
$$+\frac{2\log_{\frac{1}{2}} b}{\log_{\frac{1}{2}} c+\log_{\frac{1}{2}} a}$$

Dar $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}, \forall x,y,z\succ 0\Rightarrow S\geq 2\cdot\frac{3}{2}\Rightarrow S\geq 3$

4. Fie $\triangleleft ABC$, $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)\in C(O,R)$.Dacă :

$z_A\cdot\overline{z_B}+\overline{z_A}\cdot z_B=z_B\cdot\overline{z_C}+\overline{z_B}\cdot z_C=z_A\cdot\overline{z_C}+\overline{z_A}\cdot z_C$ atunci $\triangleleft ABC$ este echilateral.

Dem:

$\boxed{\text{Solutia 1}}$ Avem :

$$(Z_A - Z_B)(\overline{Z_A} - \overline{Z_B}) = |Z_A - Z_B|^2 = |Z_A|^2 - (Z_A \cdot \overline{Z_B} + \overline{Z_A} \cdot Z_B) + |Z_B|^2$$

$$=> \begin{cases} Z_A \cdot \overline{Z_B} + \overline{Z_A} \cdot Z_B = |Z_A|^2 + |Z_B|^2 - |Z_A - Z_B|^2 \\ Z_B \cdot \overline{Z_C} + \overline{Z_B} \cdot Z_C = |Z_B|^2 + |Z_C|^2 - |Z_B - Z_C|^2 \\ Z_C \cdot \overline{Z_A} + \overline{Z_C} \cdot Z_A = |Z_C|^2 + |Z_A|^2 - |Z_C - Z_A|^2 \end{cases}$$

$<=>$

$$|Z_A|^2 + |Z_B|^2 - |Z_A - Z_B|^2 = |Z_B|^2 + |Z_C|^2 - |Z_B - Z_C|^2 = |Z_C|^2 + |Z_A|^2 - |Z_C - Z_A|^2$$

$$<=> |Z_A - Z_B|^2 = |Z_B - Z_C|^2 = |Z_C - Z_A|^2 <=>$$

$$AB = BC = CA <=> \Delta\, ABC \; echilateral$$

$$Z_A \cdot \overline{Z_A} = Z_B \cdot \overline{Z_B} = Z_C \cdot \overline{Z_C} = |Z_A|^2 = |Z_B|^2 = |Z_C|^2 = R^2$$

Notă.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.

Timp de lucru 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a XI a

1.Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $AB = BA$ şi $A^7 = I_n, B^5 = I_n$ .Să se calculeze $rang(A+B)$.

Solutie

$A^7 = I_n, B^5 = I_n \Rightarrow A^{35} = B^{35} = I_n \Rightarrow A^{35} + B^{35} = 2I_n$

$AB = BA \Rightarrow A^{35} + B^{35} = (A+B)(A^{34} - A^{33}B + A^{32}B - ... - AB^{33} + B^{34})$

$(A+B)\left[\frac{1}{2}(A^{34} - A^{33}B + A^{32}B - ... - AB^{33} + B^{34})\right] = I_n \Rightarrow A+B$ este inversabilă, deci

$\det(A+B) \neq 0 \Rightarrow rang(A+B) = n$.

2.Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $\det\,(A^*)^* = (\det A)^4$.

b) Dacă A este o matrice simetrică, $\det A = 0$ şi fiecare element al lui A are pătratul egal cu complementul său algebric atunci $A = O_3$.

Gheorghe Alexe, profesor, Brăila

Solutie

$a)\quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \ , A_{11} = \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} \ , A_{12} = -\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} \ , A_{13} = \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} \ , \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} \ , \ A_{23} = -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix}$

$A_{31} = \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} \ , \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} \ , \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}$

$(A^*)^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \ , \ A'_{11} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ai - gc & -ah + bg \\ -af + cd & ae - bd \end{vmatrix} =$

$= a \cdot detA \ => \ A'_{11} = a \det A$

$A'_{12} = -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{32} \\ A_{13} & A_{33} \end{vmatrix} = b \cdot detA \ , \ A'_{13} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix} = c \cdot detA$

$$Analog: A'_{21} = d \cdot detA \quad , \quad A'_{22} = e \cdot detA \quad , \quad A'_{23} = f \cdot detA$$
$$A'_{31} = g \cdot detA \quad , \quad A'_{32} = h \cdot detA \quad , \quad A'_{33} = i \cdot detA$$

$$(A^*)^* = \begin{pmatrix} a\,detA & b\,detA & c\,detA \\ d\,detA & e\,detA & f\,detA \\ g\,detA & h\,detA & i\,detA \end{pmatrix}$$

$$(A^*)^* = (detA) \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \;=>\; \boxed{(A^*)^* = (detA) \cdot A}$$

$$=> \det(A^*)^* = (detA)^4$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, Asimetrica\ (A = A^t)$$

$$detA = 0 \quad => \begin{cases} 1)\ a\,(df - e^2) + b(ce - bf) + c(be - cd) = 0 \\ 2) b(ce - bf) + d(af - c^2) + e(bc - ae) = 0 \\ 3) c(be - cd) + e(bc - ae) + f(ad - b^2) = 0 \end{cases}$$
$$a, b, c, d, e, f \in R$$

$$\begin{array}{lll} & \boldsymbol{a^2 = df - e^2} & \boldsymbol{d^2 = af - c^2} \\ \boldsymbol{si} & \boldsymbol{b^2 = ce - fb} & \boldsymbol{e^2 = bc - ae} \\ & \boldsymbol{c^2 = be - cd} & \boldsymbol{f^2 = ad - b^2} \end{array}$$

$$=> \begin{array}{l} 1) => \\ 2) => \\ 3) => \end{array} \begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 0 \\ b^3 + d^3 + e^3 = 0 \\ c^3 + e^3 + f^3 = 0 \end{cases} si \begin{cases} a^2 + e^2 = df \\ c^2 + d^2 = af \\ f^2 + b^2 = ad \end{cases} (+)$$

$$=> a^2 + d^2 + f^2 - ad - df - af + e^2 + c^2 + b^2 = 0 \,|\cdot 2$$
$$=> 2a^2 + 2d^2 + 2f^2 - 2ad - 2df - 2af + 2e^2 + 2c^2 + 2b^2 = 0$$
$$=> (a-d)^2 + (d-f)^2 + (a-f)^2 + 2(e^2 + c^2 + b^2) = 0$$
$$a, b, c, d, e, f \in R$$
$$=> (a-d)^2 = 0 \;, (d-f)^2 = 0 \;, (a-f)^2 = 0 \;, e^2 + c^2 + b^2 = 0$$
$$=> a = d \;, d = f \;, a = f \;, e = c = b = 0$$
$$=> a = d = f \quad si \quad e = c = b = 0 \;=>$$
$$=> a = d = f = e = c = b = 0 \;=>$$
$$A = O_3$$

3.Calculați limita șirului $(x_n)_{n\geq 2}$, dat prin

$$x_n = \sqrt[n]{n!} \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt[n]{2014} - \frac{\pi}{4} \right), \ \forall n \geq 2.$$

Marius Damian, profesor, Brăila

Solutie

$$\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b=\operatorname{arctg}\frac{a-b}{1+a\cdot b},\ \forall a,b\in\mathbb{R},\ a\cdot b>-1,$$

rezultă

$$x_n=\sqrt[n]{n!}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt[n]{2014}-\operatorname{arctg}1\right)=\sqrt[n]{n!}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[n]{2014}-1}{\sqrt[n]{2014}+1}.$$

Utilizând criteriul Cauchy-D'Alembert și limitele remarcabile:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\ \lim_{n\to+\infty}u_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}u_n}{u_n}=1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1,\ \forall\alpha>0,\ \lim_{n\to+\infty}u_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^{u_n}-1}{u_n}=\ln\alpha,\forall\alpha>0$$

avem

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[n]{2014}-1}{\sqrt[n]{2014}+1}}{\frac{\sqrt[n]{2014}-1}{\sqrt[n]{2014}+1}}\cdot n\cdot\frac{\sqrt[n]{2014}-1}{\sqrt[n]{2014}+1}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right]\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[n]{2014}-1}{\sqrt[n]{2014}+1}}{\frac{\sqrt[n]{2014}-1}{\sqrt[n]{2014}+1}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2014}+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{2014^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{e}\cdot1\cdot\frac{1}{1+1}\cdot\ln 2014=\frac{\ln 2014}{2e}.$$

4.Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat prin relația de recurență $x_{n+1}=x_n^2-4x_n+6,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, unde $x_1\in[2,3]$ este dat , este convergent şi să i se precizeze limita .

Narcis Gabriel Turcu, profesor, Brăila

Solutie

Dacă şirul ar fi convergent , notând $\lim_{n\to\infty}x_n=l$, atunci , din relația de recurență , obținem ecuația $l=l^2-4l+6$ cu soluțiile $l_1=2$ şi $l_2=3$. Având mai mult de o soluție cu atât mai mult nu ne putem opri aici . Dacă şirul nu este convergent atunci niciuna nu este limita şirului , iar dacă este convergent atunci poate fi ori o valoare ori cealaltă valoare în funcție de monotonia şi mărginirea şirului . În cazul considerat nu se pot calcula efectiv termenii $x_2,x_3,...$, dar îi putem compara . Avem $x_2-x_1=x_1^2-5x_1+6=(x_1-2)(x_1-3)\le0$, adică $x_2\le x_1$. Mai mult , din $x_2=x_1^2-4x_1+6=(x_1-2)^2+2\ge0\Rightarrow x_2\ge2$, deci şi $x_2\in[2,3]$. În mod analog se obține şi $x_3\in[2,3]$ şi în general $2\le...\le x_n\le...\le x_3\le x_2\le x_1\le3$. De aici , prin inducție matematică , putem demonstra riguros că şirul este monoton şi mărginit :

Mărginirea şirului . Formulăm propoziția $P(n): x_n \in [2,3], (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

I.Verificarea propoziției $P(1): x_1 \in [2,3]$: evident din ipoteză .

II.Demonstrarea implicației $P(k) \Rightarrow P(k+1), (\forall) k \in \mathbb{N}^*$.

Avem

$$x_{k+1} \in [2,3] \Leftrightarrow x_k^2 - 4x_k + 6 \in [2,3] \Leftrightarrow \begin{cases} x_k^2 - 4x_k + 6 \geq 2 \\ x_k^2 - 4x_k + 6 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_k - 2)^2 \geq 0 \\ (x_k - 1)(x_k - 3) \leq 0 \end{cases}$$

ceea ce este evident având în vedere că $x_k \in [2,3]$.

Deci $P(n)$ este adevărată $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Mărginirea şirului . Formulăm propoziția $Q(n): x_n \geq x_{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

I.Verificarea propoziției $Q(1): x_1 \geq x_2$: am demonstrat mai sus .

II.Demonstrarea implicației $Q(k) \Rightarrow Q(k+1), (\forall) k \in \mathbb{N}^*$.

$x_{k+1} \geq x_{k+2} \Leftrightarrow x_{k+1} \geq x_{k+1}^2 - 4x_{k+1} + 6 \Leftrightarrow (x_{k+1} - 2)(x_{k+1} - 3) \leq 0$ care este adevărată deoarece am văzut că $x_n \in [2,3], (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Deci , $Q(n)$ este adevărată $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare , şirul este descrescător şi mărginit inferior , de unde rezultă că este convergent . Am văzut că limita poate fi 2 sau 3 . Observăm că , dacă $x_1 = 2$ atunci $x_n = 2, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, deci limita este $l = 2$, dacă $x_1 = 3$ atunci $x_n = 3, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, deci limita este $l = 3$, iar dacă $x_1 \in (2,3)$ şirul este chiar strict descrescător şi atunci limita este $l = 2$.

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
2. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA a XII-a

SOLUŢII

1. Se consideră $k>0$ şi mulţimea $G=(-k,k)$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall x,y\in G$. Admitem cunoscut că $(G,*)$ este grup comutativ cu elementul neutru 0.

a) Să se calculeze x^n, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, unde $x^n=\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de } n \text{ ori } x}$.

b) Să se arate că $\operatorname{ord}(x)=+\infty$, $\forall x\in G$, $x\neq 0$.

c) Să se arate că grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

Gheorghe Alexe, profesor, Brăila

Soluţie. a) Se demonstrează uşor că $f:(-k,k)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{k-x}{k+x}$ este izomorfism de la $(G,*)$ la $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ cu $f^{-1}(x)=\dfrac{k(1-x)}{1+x}$ şi $f(0)=1$.

Atunci

$$f\Big(\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de } n \text{ ori } x}\Big)=\underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot...\cdot f(x)}_{\text{de } n \text{ ori } f(x)}=\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de } n \text{ ori } x}=f^{-1}\left(\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^n\right)=\frac{k\left[1-\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^n\right]}{1+\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^n}.$$

b) $$x^n=0\Leftrightarrow\frac{k\left[1-\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^n\right]}{1+\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^n}=0\Leftrightarrow\left(\frac{k-x}{k+x}\right)^n=1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{k-x}{k+x}=\pm1, & n \text{ par}\\ \dfrac{k-x}{k+x}=1, & n \text{ impar.}\end{cases}$$

$\dfrac{k-x}{k+x}=-1\Rightarrow k-x=-k-x\Rightarrow k=0$, fals;

$\dfrac{k-x}{k+x}=1\Rightarrow k-x=k+x\Rightarrow x=0$, fals.

c) Presupunem, prin absurd, că $(G,*)\simeq(\mathbb{R}^*,\cdot)$. Atunci există funcţia bijectivă $f:G\to\mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in G$.

Avem $f(0)=1$ şi pentru $-1\in\mathbb{R}^*$, folosind bijectivitatea lui f, există şi este unic $a\in G$, $a\neq 0$ astfel încât $f(a)=-1$.

Urmează $f(a*a)=f(a)\cdot f(a)=(-1)\cdot(-1)=1=f(0)\overset{f\text{ injectivă}}{\Rightarrow} a*a=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{2k^2a}{k^2+a^2}=0\Rightarrow 2k^2a=0\Rightarrow k=0$ sau $a=0$, fals. În concluzie, grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

2. Grupul $(G,\cdot)$ are 2014 elemente, iar funcția $f:G\to G,\ f(x)=x^9$ este endomorfism al grupului G. Demonstrați că G este comutativ.

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluție. Din faptul că f este endomorfism al lui G rezultă că $\forall x,y\in G$ are loc:

$f(xy)=f(x)f(y)\Rightarrow(xy)^9=x^9y^9\Rightarrow x(yx)^8y=x^9y^9\Rightarrow(yx)^8=x^8y^8$. (1)

Atunci

$y^9x^9=(yx)^9=yx(yx)^8\overset{(1)}{=}yxx^8y^8\Rightarrow y^8x^9=x^9y^8$. (2)

Prin urmare,

$x^{72}y^{72}=(x^8)^9(y^9)^8\overset{(2)}{=}y^{72}x^{72}$ (3)

și

$(xy)^{72}=((xy)^9)^8=(x^9y^9)^8\overset{(1)}{=}(y^9)^8(x^9)^8=y^{72}x^{72}\overset{(3)}{=}x^{72}y^{72}$. (4)

Astfel,

$$(xy)^{2016}=((xy)^{72})^{28}\overset{(4)}{=}(x^{72}y^{72})^{28}=\underbrace{(x^{72}y^{72})(x^{72}y^{72})...(x^{72}y^{72})}_{\text{de 28 de ori }(x^{72}y^{72})}=$$

$$\overset{(3)}{=}\underbrace{x^{72}x^{72}...x^{72}}_{\text{de 28 de ori }x^{72}}\underbrace{y^{72}y^{72}...y^{72}}_{\text{de 28 de ori }y^{72}}=(x^{72})^{28}(y^{72})^{28}=x^{2016}y^{2016}.(5)$$

Cum G are 2014 elemente, rezultă că $a^{2014}=e,\ \forall a\in G$ și (5) devine

$(xy)^2=x^2y^2\Rightarrow xyxy=xxyy\Rightarrow yx=xy$. (6)

Cum x și y au fost alese în mod arbitrar, din (6) deducem că G este comutativ.

3. a) Să se calculeze $\displaystyle\int\left[\frac{x}{(x+1)^2}\sin x+\frac{x+2}{(x+1)^2}\cos x\right]\mathrm{d}x,\ x\in(-1,\infty)$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int\left[\frac{x}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x+2}{(x+1)^2}g(x)\right]\mathrm{d}x,\ x\in(-1,\infty)$, unde $f,g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ sunt două funcții derivabile cu $f'(x)=g(x)$ și $g'(x)=-f(x)$, $\forall x\in(-1,\infty)$.

Adela Dimov, profesor, Brăila

Soluție. Dăm soluția cerinței corespunzătoare punctului b). Cealaltă cerință rezultă ca o consecință directă a acesteia. Avem:

$$\int\left[\frac{x}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x+2}{(x+1)^2}g(x)\right]dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}\right)'\left[xf(x)+(x+2)g(x)\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{x+1}\left[xf(x)+(x+2)g(x)\right]+\int\frac{1}{x+1}\left[f(x)+xf'(x)+g(x)+(x+2)g'(x)\right]dx=$$

$$=-\frac{xf(x)+(x+2)g(x)}{x+1}+\int\frac{1}{x+1}\left[f(x)+xg(x)+g(x)-(x+2)f(x)\right]dx=$$

$$=-\frac{xf(x)+(x+2)g(x)}{x+1}+\int\frac{1}{x+1}\left[-(x+1)f(x)+(x+1)g(x)\right]dx=$$

$$=-\frac{xf(x)+(x+2)g(x)}{x+1}+\int\left[-f(x)+g(x)\right]dx=$$

$$=-\frac{xf(x)+(x+2)g(x)}{x+1}+g(x)+f(x)+C=$$

$$=\frac{-xf(x)-(x+2)g(x)+(x+1)g(x)+(x+1)f(x)}{x+1}+C=\frac{f(x)-g(x)}{x+1}+C.$$

a) În cele de mai sus luăm $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ şi obţinem:

$$\int\left[\frac{x}{(x+1)^2}\sin x+\frac{x+2}{(x+1)^2}\cos x\right]dx=\frac{\sin x-\cos x}{x+1}+C.$$

4. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^a\sin^{32}\frac{1}{x}\cos^{23}\frac{1}{x}, & x>0\\ a, & x=0.\end{cases}$

a) Să se determine $a\in[0,+\infty)$ astfel încât f să admită primitive.

b) Să se determine $a\in(-\infty,0)$ astfel încât f să fie integrabilă pe $[0,2\pi]$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluţie. a) I. Dacă $a\in(0,+\infty)$, din $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^a=0$ şi $\sin^{32}\frac{1}{x}\cos^{23}\frac{1}{x}\in[-1,1]$, $\forall x>0$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=0$. Dar $f(0)=a\neq0\Rightarrow f$ are discontinuitate de speţa I $\Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux $\Rightarrow f$ nu admite primitive.

II. Dacă $a=0\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sin^{32}\frac{1}{x}\cos^{23}\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Pentru $x>0$,

$$f(x)=\sin^{32}\frac{1}{x}\cos^{23}\frac{1}{x}=\sin^{32}\frac{1}{x}\cos^{22}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=\sin^{32}\frac{1}{x}\left(1-\sin^2\frac{1}{x}\right)^{11}\cos\frac{1}{x}=$$

$$= \sin^{32}\frac{1}{x}\left(C_{11}^0 - C_{11}^1 \sin^2\frac{1}{x} + C_{11}^2 \sin^4\frac{1}{x} - \ldots - C_{11}^{11}\sin^{22}\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x} =$$

$$= \left(C_{11}^0 \sin^{32}\frac{1}{x} - C_{11}^1 \sin^{34}\frac{1}{x} + C_{11}^{36}\sin^4\frac{1}{x} - \ldots - C_{11}^{11}\sin^{54}\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}.$$

Vom demonstra că $\begin{cases} \sin^{2k}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $x > 0$,

$$\left(\frac{1}{2k+1}\cdot x^2 \cdot \sin^{2k+1}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2k+1}\cdot 2x \cdot \sin^{2k+1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2k+1}\cdot x^2 \cdot (2k+1)\cdot \sin^{2k}\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\cdot 2x \cdot \sin^{2k+1}\frac{1}{x} - \sin^{2k}\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^{2k}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2k+1}\cdot 2x \cdot \sin^{2k+1}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} - \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2k+1}\cdot x^2 \cdot \sin^{2k+1}\dfrac{1}{x}\right)', & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Prima funcție este continuă, deci admite primitive, iar a doua admite ca primitivă funcția $\begin{cases} \dfrac{1}{2k+1}\cdot x^2 \cdot \sin^{2k+1}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ și prin sumare obținem că și $\begin{cases} \sin^{32}\dfrac{1}{x}\cos^{23}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive.

Așadar, singurul $a \in [0, +\infty)$ pentru care f admite primitive este $a = 0$.

b) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi} \to 0$.

$$f(x_n) = x_n^a \sin^{32}\frac{1}{x_n}\cos^{23}\frac{1}{x_n} = x_n^a \sin^{32}\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\cos^{23}\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) =$$

$$= x_n^a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{32}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{23} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{55}\cdot\left(\frac{1}{\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi}\right)^a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{55}\cdot\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)^{-a} \to \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ nu este mărginită pe $[0, 2\pi] \Rightarrow f$ nu este integrabilă pe $[0, 2\pi]$ pentru niciun $a \in (-\infty, 0)$.