

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

**Subiectul I (30 puncte)**

- 5p 1. Să se arate că  $\log_3 8 \cdot \log_2 9 \in \mathbb{N}$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1$ . Calculați  $(f \circ f)(-1)$ .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{2x-1} = x - 2$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea  $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{50}\}$ , acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. Într-un reper cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, -2)$  și  $B(-3, 0)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $A$  față de  $B$ .
- 5p 6. Să se calculeze  $\sin 2x$ , știind că  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$  și  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

**Subiectul II (30 puncte)**

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ .
- 7p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\det(A - xI_2) = -20$ .
- 8p b) Să se determine numărul real  $m$  astfel încât  $A^2 + mI_2 = 9A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție "o" prin  $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ .
- 7p a) Calculați  $(-3) \circ 6$ .
- 8p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $x \circ x = \sqrt{12}$ .

**Subiectul III (30 puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$ .
- 7p a) Să se arate că  $f'(x) = -\frac{x+1}{e^x}$ .
- 8p b) Să se arate că  $f(x) \leq e$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+1}, & x > 0 \\ 2 + x \cdot e^x, & x \leq 0 \end{cases}$ .
- 5p a) Să se arate că  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 10p b) Determinați primitiva funcției  $f$  pentru  $x < -1$ , al cărei grafic conține punctul  $A(-2, -1)$ .